

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION BLANCHE Février 2007

MATHÉMATIQUES

Série : S

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures-COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotée de 1 à 5.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants, le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned}x_0 &= 3 & \text{et} & & x_{n+1} &= 2x_n - 1 \\ y_0 &= 1 & \text{et} & & y_{n+1} &= 2y_n + 3.\end{aligned}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. (a) Calculer le pgcd de x_8 et x_9 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 ?
(b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
(b) Exprimer y_n en fonction de n .
(c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
(d) On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n .
Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
(b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n , en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} [(x + (1 - x)e^{2x})].$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ .
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$.
(a) Étudier le sens de variation de u .
Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0, 1]$.
(b) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

- Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.
- Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Étudier les variations de la fonction f .

Partie B

- On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1)y' = \frac{y}{4}.$$

- Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
 - Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
 - Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
- En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \begin{cases} u'(t) &= \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

- On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) &= -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

- Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .
- Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?