

Devoir de Mathématiques N° 1 (2 heures)

Exercice 1

Représenter graphiquement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan l'ensemble \mathcal{U} des points $M(x; y)$ satisfaisant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$$

Vous donnerez une justification succincte.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$; $D_f = \mathbb{R}_+$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. On considère sur $D = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ les fonctions

$$g_1(x) = \frac{\sin 7x}{2x} \text{ et } g_2(x) = \frac{\sin 7x}{\sin 2x}.$$

(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x)$.

(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g_2(x)$.

3. $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; $D_h = \mathbb{R}_+ \setminus \{3\}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$.

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{2 \sin x - 3x}{x - 2}$ définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Exercice 4

Soit $f(x) = 3x \sin \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* .

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0 par valeurs négatives.

Exercice 5

Résoudre dans $[0; 2\pi]$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 6

On donne $\cos x = \frac{3}{8}$, et $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Calculer $\sin x$; $\cos 2x$; et $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$\frac{x}{x - 1} \leq \frac{2}{x}$$

Exercice 8

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

Calculer $P(-1)$ et factoriser P en produit de facteurs du premier degré.