DIPLÔME NATIONAL DU BREVET

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

SÉRIE COLLÈGE

Durée de l'épreuve : 2 heures

Ce sujet comporte 10 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 10
Le candidat doit traiter l'ensemble des exercices.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée *(circulaire n^o^ 99-186 du 16 novembre 1999).*
L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

Exercice 1 — 19 points

1. On considère le programme de calcul ci-dessous :

— On pense à un nombre — On calcule le carré de ce nombre — On ajoute au résultat le double du nombre de départ — On ajoute 1 au résultat précédent.

a) Quel nombre obtient-on si le nombre de départ est 2 ?
Si le nombre de départ est 2, on obtient : $2 \longrightarrow 2^2 = 4 \longrightarrow 4+2\times 2 = 8 \longrightarrow 8+1 = \boxed{9}$

b) Quel nombre obtient-on si le nombre de départ est 3 ?
Si le nombre de départ est 3, on obtient : $3 \longrightarrow 3^2 = 9 \longrightarrow 9+2\times 3 = 15 \longrightarrow 15+1 = \boxed{16}$

c) Quel nombre obtient-on si le nombre de départ est 5 ?
Si le nombre de départ est 5, on obtient : $5 \longrightarrow 5^2 = 25 \longrightarrow 25+2\times 5 = 35 \longrightarrow 35+1 = \boxed{36}$

d) Quelle conjecture peut-on faire sur le résultat obtenu ?
Il semble qu'on obtienne $\boxed{\text{le carré du nombre de départ auquel on a ajouté 1.}}$

e) Démontrer cette conjecture.
Si on appelle x le nombre de départ, on obtient :

— Après l'étape 1 : x^2

— Après l'étape 2 : $x^2 + 2x$

— Après l'étape 3 : $x^2 + 2x + 1$

Or, pour tout nombre x, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ $\boxed{\text{ce qui prouve bien la conjecture.}}$

2. On pose

$$A(x) = (7-2x)^2 + (3-4x)(7-2x)$$

a) Développer et réduire $A(x)$

$$\begin{aligned} A(x) &= (7-2x)^2 + (3-4x)(7-2x) \\ &= 7^2 - 2\times 7\times 2x + (2x)^2 + 3\times 7 - 3\times 2x - 4x\times 7 + 4x\times 2x \\ &= 49 - 28x + 4x^2 + 21 - 6x - 28x + 8x^2 \\ &= \boxed{12x^2 - 62x + 70} \end{aligned}$$

b) Factoriser $A(x)$

En remarquant que $7-2x$ est un facteur commun, on obtient :

$$\begin{aligned} A(x) &= (7-2x)^2 + (3-4x)(7-2x) \\ &= (7-2x)\big((7-2x) + (3-4x)\big) \\ &= (7-2x)(7-2x+3-4x) \\ &= \boxed{(7-2x)(-6x+10)} \end{aligned}$$

c) Résoudre l'équation suivante :

$$(E)\ :\ A(x) = 0$$

On résout l'équation (E) en utilisant la forme factorisée et la règle qui dit qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc :

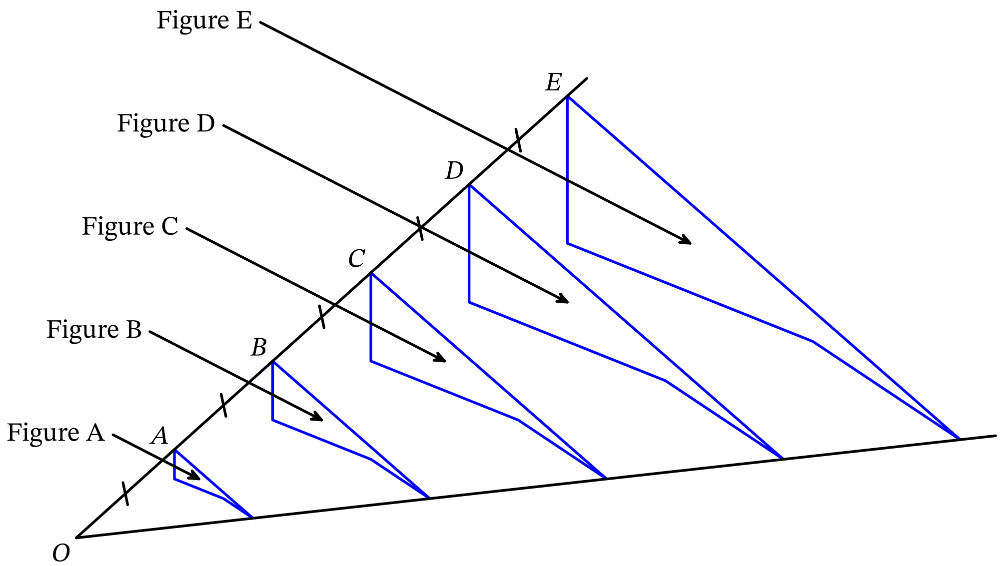
$$
\begin{aligned}
(E)\ :\ A(x) = 0 &\iff (7-2x)(-6x+10) = 0\\
&\iff 7-2x = 0 \quad \text{ou} \quad -6x+10 = 0\\
&\iff -2x = -7 \quad \text{ou} \quad -6x = -10\\
&\iff x = \frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc $\boxed{\frac{7}{2} \text{ et } \frac{5}{3}}$

Exercice 2 — 19 points

Partie A

Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.



1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A ? Aucune justification n'est attendue.

   Le rapport de l'homothétie qui transforme la figure A en la figure C est $\boxed{3}$.

2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ? *Aucune justification n'est attendue.*

   Si on applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E, on obtient $\boxed{\text{la figure C.}}$

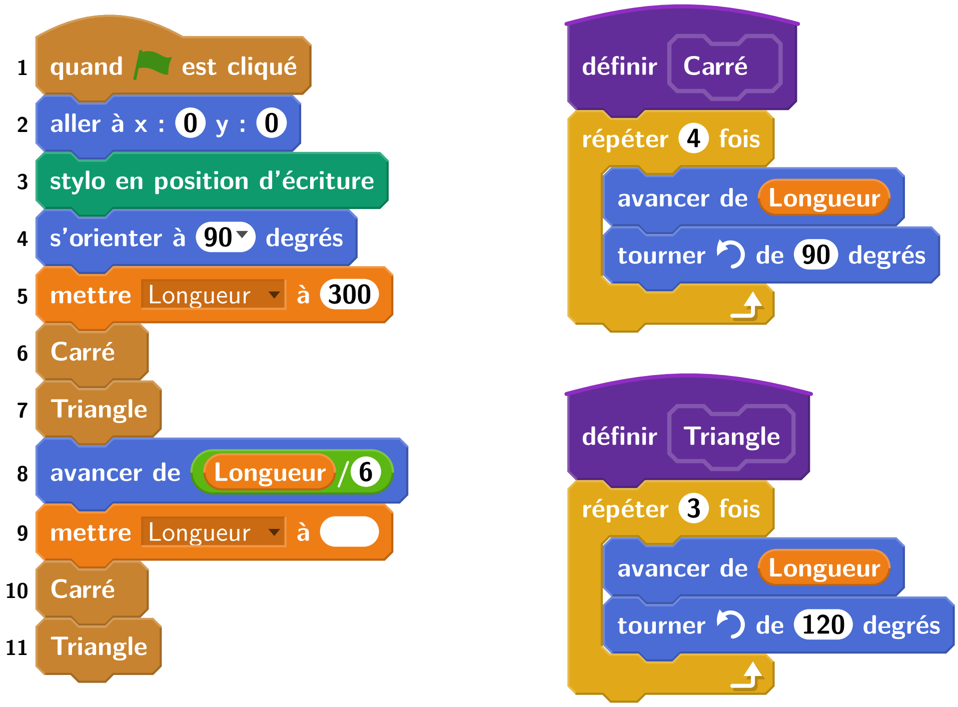
3. Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ?

   La figure B est l'image de la figure A par une homothétie de rapport 2 donc l'aire de la figure B est $2^2 = 4$ fois plus grande que l'aire de la figure A. Il s'agit donc de $\boxed{\text{la figure B.}}$

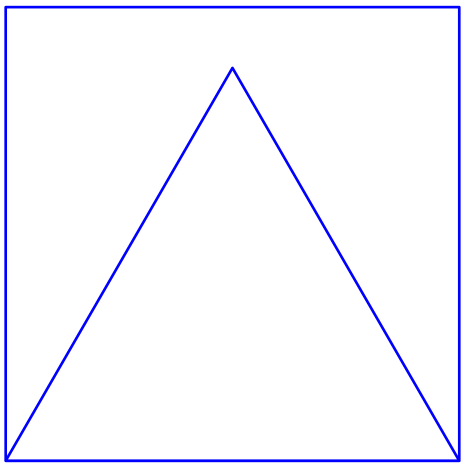
Partie B

Les longueurs sont en pixels.
L'expression « s'orienter à 90 » signifie que l'on s'oriente vers la droite.

On donne le programme suivant :

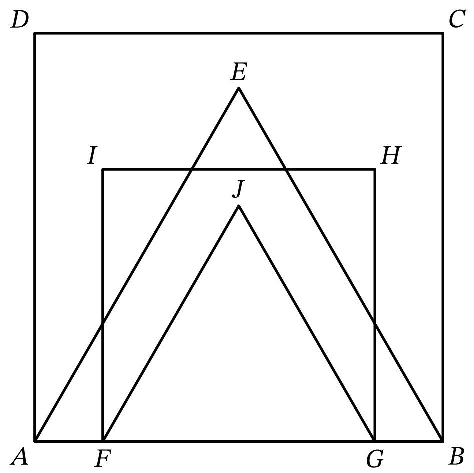


1. On prend comme échelle 1 cm pour 50 pixels.
   a) Représenter sur votre copie la figure obtenue si le programme est exécuté jusqu'à la ligne 7 comprise.
   À la ligne 7, on a dessiné un carré et un triangle équilatéral de 300 pixels de côté. On obtient donc :



   b) Quelles sont les coordonnées du stylo après l'exécution de la ligne 8 ?
   Après avoir dessiné le carré et le triangle, on se retrouve au point de départ de coordonnées $(0;0)$ et avec l'orientation de départ (vers la droite).
   Après la ligne 8, il faut avancer de $\frac{300}{6} = 50$ et les coordonnées du stylo sont donc : $\boxed{(50;0)}$.

2. On exécute le programme complet et on obtient la figure ci-dessous qui possède un axe de symétrie vertical.



Recopier et compléter la ligne 9 du programme pour obtenir cette figure.

Sur la figure proposée, AF doit mesurer 50. Puisque la figure admet un axe de symétrie GB doit mesurer aussi 50. Le côté du carré $FGHI$ doit donc être $300 - 2 \times 50 = 200$. La ligne 9 serait donc :

`mettre Longueur à 200`

3. a) Parmi les transformations suivantes, translation, homothétie, rotation, symétrie axiale, quelle est la transformation géométrique qui permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

   La transformation géométrique qui permet d'obtenir le petit carré à partir du grand est une $\boxed{\text{homothétie.}}$

   Le centre de cette homothétie est le point d'intersection des droites (AF) et (DI) (c'est le milieu de $[AB]$). Le rapport de cette homothétie est $\frac{FG}{AB} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$.

   b) Quel est le rapport des aires entre les deux carrés dessinés ?

   Puisque le rapport de l'homothétie est $\frac{2}{3}$, le rapport des aires est $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{9}}$

Exercice 3 — 18 points

Les 2 parties de cet exercices sont indépendantes.

Partie A - Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous déterminer si elle vraie ou fausse.

Attention : il faut ***justifier*** *toutes les réponses.* On cherchera une justification, une preuve lorsque c'est vrai et on donnera un contre-exemple lorsque c'est faux.

1. -2 est solution de l'équation $2x^2 - 3x + 2 = 0$.

   $2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 2 = 2 \times 4 + 6 + 2 = 16 \neq 0$. L'affirmation est $\boxed{\text{fausse.}}$
2. Le reste de la division euclidienne de 180 par 8 est 4.

   $180 = 22 \times 8 + 4$. L'affirmation est $\boxed{\text{vraie.}}$
3. Plus un nombre entier est grand et plus il a de diviseurs.

   Le nombre 6 a 4 diviseurs : 1, 2, 3 et 6 alors que le nombre 7, qui est plus grand que 6 n'en a que 2 : 1 et 7. L'affirmation est $\boxed{\text{fausse.}}$
4. 144 admet exactement 15 diviseurs.

   $144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18 = 9 \times 16 = 12 \times 12$. Les diviseurs de 144 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. L'affirmation est $\boxed{\text{vraie.}}$

5. Tout nombre divisible par 2 et par 3 est divisible par 5.

   6 est divisible par 2 et par 3 mais n'est pas divisible par 5. L'affirmation est $\boxed{\text{fausse.}}$

6. La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

   3 et 5 sont deux nombres premiers mais $3+5=8$ n'est pas premier. L'affirmation est $\boxed{\text{fausse.}}$

Partie B - Calculs

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres 25 740 et 42 900. Les calculs sont à détailler sur la copie.

   Les calculs donnent :

$$\begin{array}{r|l} 25\,740 & 2 \\ 12\,870 & 2 \\ 6435 & 3 \\ 2145 & 3 \\ 715 & 5 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 42\,900 & 2 \\ 21\,450 & 2 \\ 10\,725 & 3 \\ 3575 & 5 \\ 715 & 5 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

   donc $\boxed{25\,740 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 13}$ et $\boxed{42\,900 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11 \times 13}$

2. Utiliser la question précédente pour simplifier au maximum la fraction $\dfrac{25\,740}{42\,900}$

   En utilisant la question précédente, on obtient :

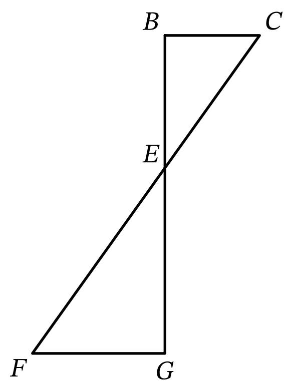
$$\frac{25\,740}{42\,900} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 13}{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11 \times 13} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Exercice 4 **16 points**

Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. On considère la figure ci-contre :

   Les droites (CF) et (BG) se coupent en E. Les droites (BC) et (GF) sont parallèles. Les droites (BC) et (EB) sont perpendiculaires.
   On donne de plus : $EC = 7$; $EG = 8$; $EB = 6$.



   a) Calculer la valeur exacte de BC.

      D'après l'énoncé, le triangle BEC est rectangle en B.
      Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
      $EC^2 = EB^2 + BC^2$
      Grâce aux valeurs fournies dans l'énoncé, on peut écrire : $7^2 = 6^2 + BC^2$.
      On en déduit : $BC^2 = 7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$
      Et ainsi : $\boxed{BC = \sqrt{13}}$

b) Calculer la valeur exacte de EF.

— $\begin{cases}(BG) \text{ et } (CF) \text{ sont sécantes en } E\\(BC) \text{ et } (GF) \text{ sont parallèles}\end{cases}$

donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{EB}{EG}=\frac{EC}{EF}=\frac{BC}{GF}$$

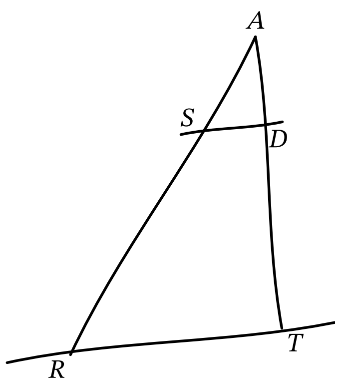
— En remplaçant les valeurs dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{6}{8}=\frac{7}{EF}$$

On en déduit : $EF=\dfrac{8\times 7}{6}=\dfrac{56}{6}=\boxed{\dfrac{28}{3}}$

2. On considère la figure à main levée ci-contre :

Les points A, D, R, S et T tels que $AD=3$, $AS=8$, $AT=30$, $AR=80$, $D\in[AT]$, $S\in[AR]$ et A, T et R ne sont pas alignés.



Démontrer que (DS) et (TR) sont parallèles.

— $\dfrac{AR}{AS}=\dfrac{80}{8}=10$ et $\dfrac{AT}{AD}=\dfrac{30}{3}=10$

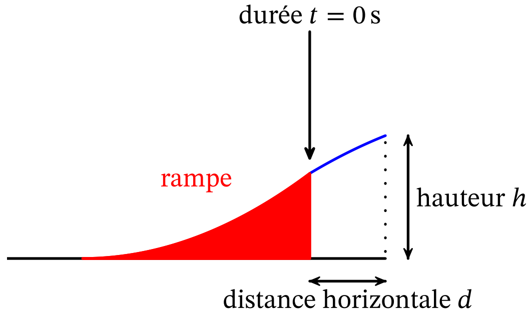
— $\begin{cases}(RS) \text{ et } (TD) \text{ sont sécantes en } A\\ D\in[AT] \text{ et } S\in[AR]\\ \dfrac{AR}{AS}=\dfrac{AT}{AD}\end{cases}$

donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès,

$\boxed{\text{les droites } (DS) \text{ et } (TR) \text{ sont parallèles.}}$

Exercice 5 **15 points**

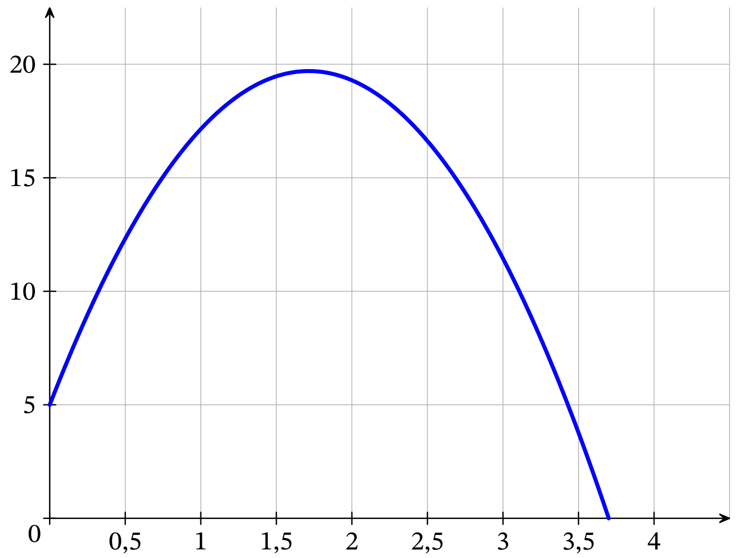
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe représentée ci-dessous, Gaëtan a effectué un saut record en moto.



Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe.
On note t la durée (en secondes) de ce saut.
La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$$h\ :\ t \longmapsto (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7)$$

Voici la courbe représentative de cette fonction h.



1. Démontrer par le calcul que $h(t) = -5t^2 + 17{,}15t + 4{,}995$.

   Pour tout valeur de t,

   $h(t) = (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7) = -5t^2 + 5t \times 3{,}7 - 1{,}35t + 1{,}35 \times 3{,}7$

   $= -5t^2 + 18{,}5t - 1{,}35t + 4{,}995 = \boxed{-5t^2 + 17{,}15t + 4{,}995}$

2. À quelle hauteur se trouve Gaëtan quand il quitte la rampe, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$. Répondre à l'aide d'une égalité ainsi que d'une phrase.

   Il faut calculer $h(0)$: $h(0) = -5 \times 0^2 + 17{,}15 \times 0 + 4{,}995 = \boxed{4{,}995}$.

   Quand il quitte la rampe, $\boxed{\text{Gaëtan se trouve à une hauteur de 4,995 m.}}$

3. a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la durée du saut de Gaëtan.

   Le saut de Gaëtan dure jusqu'à ce qu'il touche le sol, c'est-à-dire jusqu'à ce que la hauteur soit 0. On observe que la courbe coupe l'axe des abscisses pour une valeur de t environ égale à 3,7.

   $\boxed{\text{Le saut de Gaëtan dure environ 3,7 s.}}$

b) Déterminer la valeur exacte par le calcul.

Pour retrouver cette valeur par le calcul, il faut résoudre l'équation $h(t) = 0$.

$$h(t) = 0 \iff (-5t - 1{,}35)(t - 3{,}7) = 0$$
$$\iff -5t - 1{,}35 = 0 \quad \text{ou} \quad t - 3{,}7 = 0$$
$$\iff -5t = 1{,}35 \quad \text{ou} \quad t = 3{,}7$$
$$\iff t = -\frac{1{,}35}{5} = -0{,}27 \quad \text{ou} \quad t = 3{,}7$$

Parmi ces deux solutions, seule la solution positive convient.

On trouve donc que $\boxed{\text{le saut de Gaëtan dure exactement 3,7 s.}}$

4. Pendant combien de temps, environ, Gaëtan se trouve-t-il à plus de 15 m de hauteur ?

En observant la courbe, on remarque que Gaëtan passe au-dessus de 15 m pour $t \approx 0{,}75$ puis repasse en-dessous de 15 m pour $t \approx 2{,}75$.

On en déduit que $\boxed{\text{Gaëtan se trouve à plus de 15 m pendant environ 2 s.}}$

5. Au bout de combien de temps Gaëtan atteint-il la hauteur maximale de son saut ?

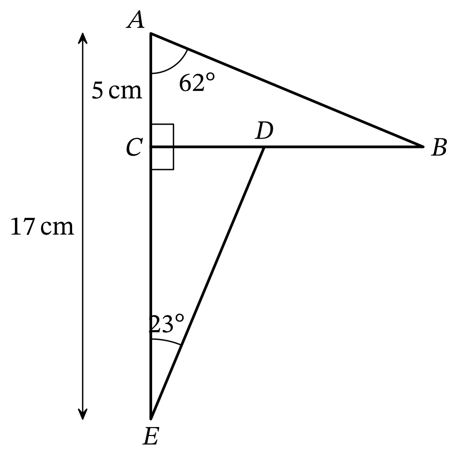
La hauteur maximale du saut correspond au sommet de la courbe. Par lecture graphique on remarque que le sommet de la courbe a une abscisse environ égale à 1,75.

On en déduit que $\boxed{\text{Gaëtan atteint la hauteur maximale de son saut au bout d'environ 1,75 s.}}$

Exercice 6 — 13 points

On considère la figure ci-dessous représentant un pendentif qui se compose de deux triangles.
Les triangles ABC et CDE sont rectangles en C.
On donne de plus : $AC = 5$ cm ; $AE = 17$ cm ; $\widehat{BAC} = 62°$ et $\widehat{CED} = 23°$.

Croquis d'un pendentif



Déterminer l'aire du pendentif. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième de cm^2.

Le pendentif est composé de deux triangles. Pour trouver son aire, il faut donc trouver l'aire de chacun de ces deux triangles.

- Aire de ABC

  — Calculons la longueur BC.
  ABC est un triangle rectangle en C
  donc $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{BC}{AC}$
  On en déduit : $\tan(62°) = \dfrac{BC}{5}$
  Et donc : $BC = 5 \times \tan(62°)$

  — $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AC \times BC}{2} = \dfrac{5 \times 5 \times \tan(62°)}{2}$
  $= \boxed{\dfrac{25\tan(62°)}{2}}$

- Aire de CDE

  — Calculons la longueur EC.
  $C \in [AE]$ donc $EC = AE - AC = 17 - 5 = 12$

  — Calculons la longueur CD.
  CDE est un triangle rectangle en C
  donc $\tan\left(\widehat{CED}\right) = \dfrac{CD}{EC}$
  On en déduit : $\tan(23°) = \dfrac{CD}{12}$
  Et donc : $CD = 12 \times \tan(23°)$

  — $\mathcal{A}_{CDE} = \dfrac{CE \times CD}{2} = \dfrac{12 \times 12 \times \tan(23°)}{2}$
  $= \boxed{72\tan(23°)}$

L'aire du pendentif est la somme des deux aires précédentes.
On a donc : $\boxed{\mathcal{A}_{\text{pendentif}} = \dfrac{25\tan(62°)}{2} + 72\tan(23°)}$
À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\boxed{\mathcal{A}_{\text{pendentif}} \approx 54{,}1 \text{ cm}^2}$