

## Devoir Mathématiques N<sup>o</sup> 8 (1h30)

### 1 Les parties A et B sont indépendantes

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2010 est passée à 300 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2012 puis à 500 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels.

La variable  $x$  désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et  $f(x)$  exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de  $x$  correspond donc à l'année 2010.

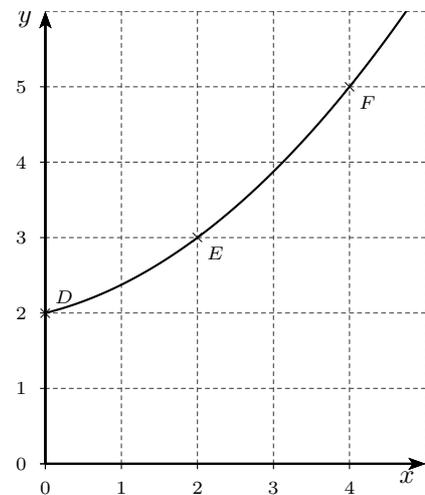
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction  $f$ .

#### PARTIE A

On cherche à déterminer la valeur des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

1. a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
- b) En déduire que le système précédent est équivalent à :  $MX = R$  avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } R \text{ une matrice colonne que l'on précisera.}$$



2. On admet que  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ , en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1<sup>er</sup> janvier 2016.

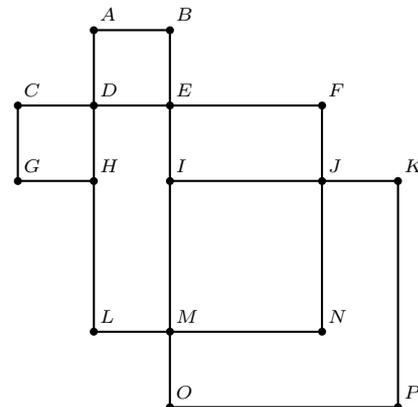
#### PARTIE B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.

1. a) Déterminer si le graphe est connexe.
- b) Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :
  - a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.
  - b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.



**2** Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

### PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.

Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.

On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger. On considère que cette situation perdure.

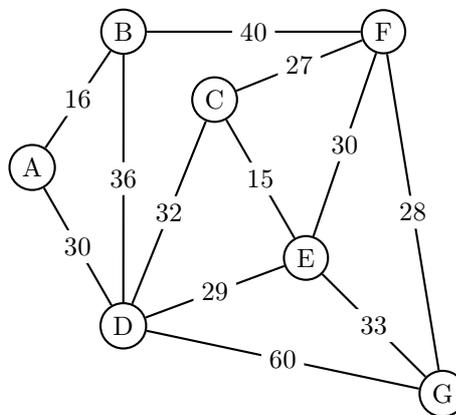
On note  $P_n = (e_n \quad l_n)$  la matrice correspondant à l'état probabiliste en  $2008 + n$ , avec  $e_n$  la probabilité que la personne travaille à l'étranger,  $l_n$  celle qu'elle travaille en France.

Ainsi  $P_0 = (0,25 \quad 0,75)$ .

- Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.
- Donner la matrice de transition  $M$  associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.
- Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de 30,475 %.
- Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :  $e_{n+1} = 0,7e_n + 0,1$ .
- On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n \geq 0$ , par  $u_n = e_n - \frac{1}{3}$ .
  - Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
  - Exprimer  $u_n$  puis  $e_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer en justifiant la limite de  $(e_n)$ .
  - Interpréter ce résultat en terme d'état stable.

### PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert. Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée. Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre. Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements. Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



- Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G. Quel trajet peut-il prendre ? Quelle est alors la durée du parcours ?