DS 8

I Partie A

1 a On a 200 agences au 1/1/2010 $\Rightarrow f(0)=2$

.... 300 .... 1/1/2012 $\Rightarrow f(2)=3$

.... 500 .... 1/1/2014 $\Rightarrow f(4)=5$

$f(0)=2\ ;\ f(2)=3;\ f(4)=5$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases}$$

b Le système équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 On a donc

$$M.X=R \Longleftrightarrow \underbrace{M^{-1}M}_{=I}X=M^{-1}R$$

$$\Longleftrightarrow X=M^{-1}R$$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \times 2 + 3(-0{,}25) + 0{,}125 \times 5 \\ -0{,}75 \times 2 + 3 - 5 \times 0{,}25 \\ 1 \times 2 \end{pmatrix}$

donc finalement $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}$

et donc on a $f(x) = 0{,}125\,x^2 + 0{,}25\,x + 2$

(3) En suivant ce modèle le nombre d'agences en 2016 sera

$f(6) = 0{,}125 \cdot 6^2 + 0{,}25 \cdot 6 + 2$ c.à.d $f(6) = 8$

En 2016 il y aura 800 agences.

Partie B

(1)(a) le graphe est connexe car on peut relier n'importe quelle paire de sommet par une chaîne.

(b) le graphe n'est pas complet car par exemple E et F non adjacents

(2) On dresse le tableau des degrés et sommets.

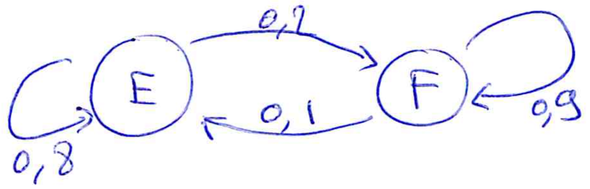
Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
degrés	2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

ⓐ et ⓑ

le graphe est connexe et il existe exactement deux sommets de degré impair (le H et le I) donc d'après le th d'Euler il n'existe pas de cycle Eulérien mais il existe une chaîne Eulérienne entre H et I.

Finalement, il n'y a pas de chemin avec le m̂ point d'arrivé et de départ mais oui il y a un chemin entre H et I.

Ⅱ ① On a le graphe suivant :



② La matrice de transit° est $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

③ On a $P_n = P_0 \times M^n$

La répartition en 2011 est donnée par $P_3 = P_0 \times M^3$

on a donc $P_3 = (0{,}30475 \quad 0{,}69525)$

donc en 2011 la propation des étudiants vivant à l'étranger est 30,475 %

④ $P_{n+1} = P_n \times M \iff (e_{n+1} \quad f_{n+1}) = (e_n \quad f_n) \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 9{,}9 \end{pmatrix}$

$\iff (e_{n+1} \quad f_{n+1}) = (0{,}8e_n + 0{,}1 f_n \quad ?)$

En particulier
$$\begin{aligned} e_{n+1} &= 0{,}8e_n + 0{,}1 f_n \\ &= 0{,}8e_n + 0{,}1(1-e_n) \\ &= 0{,}8e_n + 0{,}1 - 0{,}1e_n \end{aligned}$$

Donc on a bien $e_{n+1} = 0{,}7 e_n + 0{,}1$

(5) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = e_{n+1} - \frac{1}{3}$

$= 0{,}7 e_n + 0{,}1 - \frac{1}{3}$

$= 0{,}7 \left(e_n + \frac{0{,}1 - 1/3}{0{,}7}\right) = 0{,}7 \left(e_n + (-1/3)\right)$

$= 0{,}7\, u_n$.

donc (u_n) géométrique de raison $0{,}7$ et de premier terme $u_0 = e_0 - 1/3$
$= -1/12$

(b) Par th on a alors. $u_n = u_0 \times 0{,}7^n$

donc $u_n = -\frac{1}{12} \times (0{,}7)^n$

et comme $u_n = e_n - \frac{1}{3}$. alors $e_n = u_n + \frac{1}{3}$

c'est-à-dire $e_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\, 0{,}7^n$

(6) (a) $|0{,}7| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$

donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{12}\, 0{,}7^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = \frac{1}{3}}$

(b) Ceci veut dire que l'état stable est $P = (1/3 \;\; 2/3)$
c'est-à-dire qu'au bout de quelques années 1/3 des étudiants sont à l'étranger et 2/3 en France.

Partie B : On utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$\boxed{16A}$	∞	30A	∞	∞	∞
		∞	30A	∞	56B	∞
		62D		59D	$\boxed{56B}$	90D
		62D		$\boxed{59D}$		84F
		$\boxed{62D}$				84F
						$\boxed{84F}$

finalement le trajet le plus court est A – B – F – G en 84 min ; c.à.d 1h24.