

Devoir Mathématiques N° 7 (45mn)

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».

Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est 0,9.

Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est 0,6.

La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.

Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n -ième semaine ;
- b_n , la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n -ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n -ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$.

1. a) Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».
b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.
3. **Ne pas faire cette question. On le verra lors de la correction**
a) Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.
b) Interpréter ce résultat.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|------------------|--|
| VARIABLES : | A est un réel et N est un entier naturel |
| INITIALISATION : | A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1 |
| TRAITEMENT : | Tant que $A \leq 0,79$ N prend la valeur $N + 1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que |
| SORTIE : | Afficher N |

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.