Spé TES. DS N° 1 le 7 oct 2015

**I**

① M est une matrice $4 \times 3$

② $a_{11} = 1$ ; $a_{23} = -1$ ; $a_{33} = -1$ ; $a_{12} = -5$

**II**

① $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a 2 colonnes $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a 2 lignes.

$A \times B$ existe

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 16 & -7 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $\boxed{A \times B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 16 & -7 & 7 \end{pmatrix}}$

② A a 2 colonnes et B a 3 lignes donc le produit $A \times B$ n'existe pas

**III** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

① $\det A = (-2)(-1) - 3 \times 0 = 2$

$\det A \neq 0$ donc A est inversible.

② On cherche $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \times A^{-1} = I \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ 3a - c & 3b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2a = 1 \\ -2b = 0 \\ 3a - c = 0 \\ 3b - d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 0 \\ c = -3/2 \\ d = -1 \end{cases}$$

ainsi $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}}$

**IV** ① $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; $\det A = 3 \times 2 - 4 = 2$

$\det A \neq 0$ donc $A$ est inversible.

② $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

③ $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Le système admet un couple unique de solution : $(x;y) = (-6;7)$.

**V** ① D'après les données du tableau, nous savons que

$C(1) = 11$ ; $C(3) = 27,4$ ; $C(5) = 83$ avec $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\,1^3 + b\,1^2 + c.1 + 10 = 11 \\ a\,3^3 + b\,3^2 + c.3 + 10 = 27,4 \\ a\,5^3 + b\,5^2 + c.5 + 10 = 83 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

② ⓐ On a alors

$$(S) \iff MX = Y \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17,4 \\ 73 \end{pmatrix}$$

ⓑ

$$MX = Y \iff \underbrace{M^{-1}M}_{=I} X = M^{-1}Y$$

$$\iff X = M^{-1}Y \underset{\text{Calculatrice}}{=} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{S = \{(0,5\,;0,4\,;0,1)\}}$

③ On en déduit alors

$$C(x) = 0,5x^3 + 0,4x^2 + 0,1x + 10$$

donc $C(8) = 29240$

ainsi le cout total pour ~~800~~ recharges est de 29240 €.