Devoir Mathématiques N^o 5 (1h30)

1 Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion.
Parmi les clients, 5 % d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.
Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

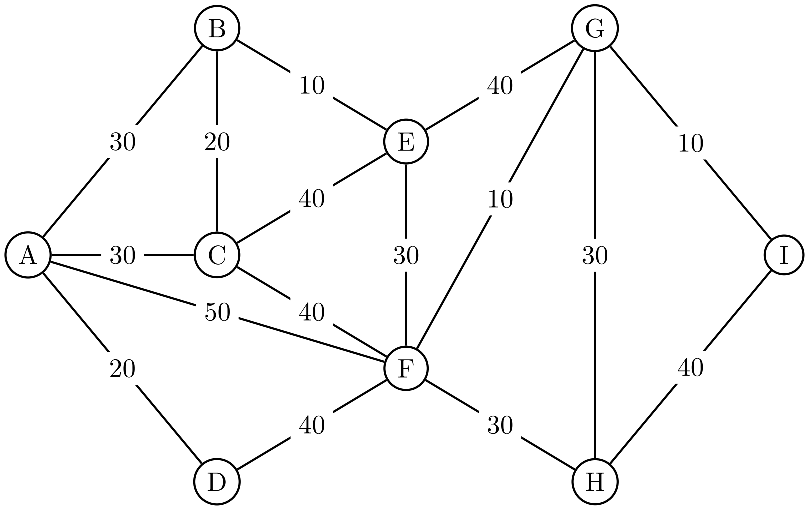
- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de 1a journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit. au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.
Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la n-ième journée de promotion.

1. Pour une journée promotionnelle donnée, on note V, l'évènement « le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle ».
   Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer l'état stable s'il existe et en donner une interprétation.

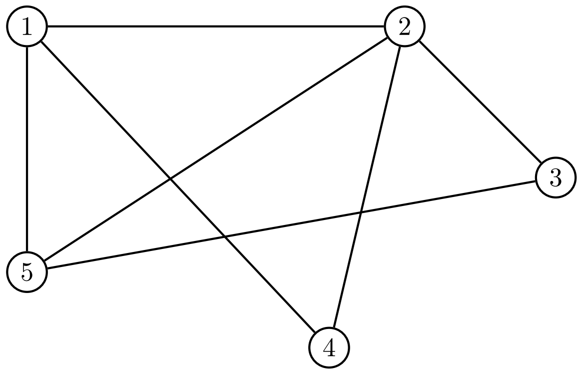
Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.
On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



1. Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
   Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
   Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.
2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
   Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I. Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.

2 Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

   a) Écrire la matrice M.

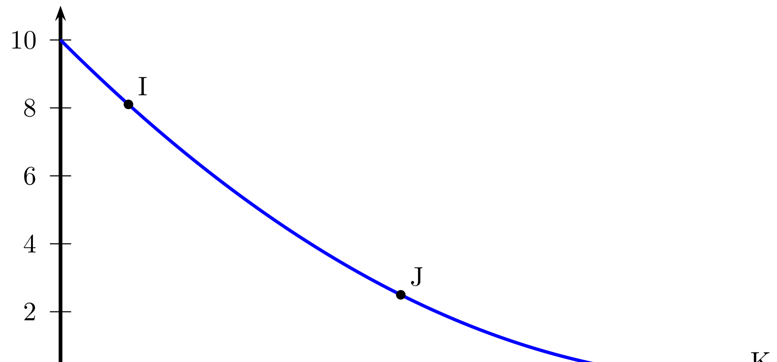
   b) On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

   Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables. (On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.



La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.
Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives $(2\,;\,8{,}1)$, $(10\,;\,2{,}5)$ et $(20\,;\,0)$.
La fonction f est définie sur $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a,b et c sont trois nombres réels.

   a) Justifier que a,b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 400a + 20b + c & = & 0 \\ 100a + 10b + c & = & 2{,}5 \\ 4a + 2b + c & = & 8{,}1 \end{cases}$

   b) Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$UX = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Déterminer a,b et c.