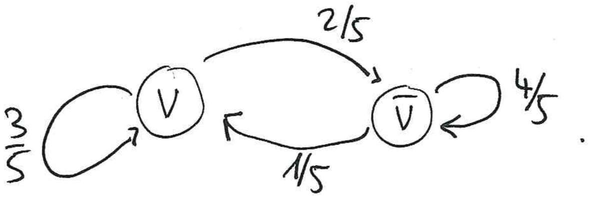
26 mars 2015

DS 5

I Partie A.

1) La situat° se modélise à l'aide du graphe suivant.



2) La matrice de transition associée à ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

3) 5% des clients ont visité le site la 1ère journée donc $P_1 = (0{,}05 \quad 0{,}95)$

on a alors $P_2 = P_1 \times M = (0{,}22 \quad 0{,}78)$ (à l'aide de la calculatrice)

ainsi la probabilité qu'un client visite le site lors de la 2ème journée de promotion est de 0,22.

4) M n'a pas de 0, donc il existe un état stable $P = (a \quad b)$

il satisfait $P = PM$

c'est à dire $(a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ b = 2/5\, a + 4/5\, b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b = 0 \\ -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b = 0 \quad \text{(inutile)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - b = 0 \quad (\times 5)$$

d'autre part $a + b = 1$ donc $b = 1 - a$

et donc $2a - (1-a) = 0 \Leftrightarrow 3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

d'où $b = \frac{2}{3}$ et l'état stable est $P(\frac{1}{3} \ \frac{2}{3})$

En conclusion, au bout de quelques journées de promot°, la probabilité qu'un client visite le site un jour de promotion est de $\frac{1}{3}$.

Partie B

(1) On dresse le tableau des degrés des sommets

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I
degrés	4	3	4	2	4	6	4	3	2

Le graphe est connexe car on peut relier n'importe quelle paire de sommet par une chaine. Exactement 2 sommets sont de degré impair. Donc d'après le th d'Euler, il existe une chaîne Eulérienne entre ces 2 sommets.

Le robot peut commencer l'inspect° en B et finir en H ou le contraire.

Par exemple : B – A – D – F – C – E – G – I – H

② On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le temps minimal pour un paquet d'aller de A à I.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	30_A	30_A	20_A	∞	50_A	∞	∞	∞
	30_A	30_A		∞	50_A	∞	∞	∞
		30_A		40_B	50_A	∞	∞	∞
				40_B	50_A	∞	∞	∞
					50_A	80_E		
						60_F	90_F	
							90_F	70_G

Le temps le plus court pour arriver en I est donc de 70 ms.
il s'agit du parcours A - F - G - I.

II ① Dessons le tableau des degrés des sommets

sommet	1	2	3	4	5
degrés	3	4	2	2	3

Le graphe étant connexe et sachant que les sommets ① et ⑤ sont les uniques sommets de degré impairs, il existe, d'après le th d'Euler une chaîne Eulérienne entre le sommet 1 et le 5.

par exemple 1 - 2 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1 - 5 convient.

② ⓐ La matrice M associée au graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ⓑ Pour déterminer le nombre de parcours express, il s'agit de déterminer le nombre de chaînes de longueurs 3 entre le sommet 1 et le 4.
On lit le coeff a_{14} de M^3
Il y a 5 parcours de longueur 3.

③ ⓐ On a $f(x) = ax^2 + bx + c$

$I(2,8,1) \in \mathcal{C} \iff f(2) = 8,1 \iff 4a + 2b + c = 8,1$

$J(10;2,5) \in \mathcal{C} \iff f(10) = 2,5 \iff 100a + 10b + c = 2,5$

$K(20,0) \in \mathcal{C} \iff f(20) = 0 \iff 400a + 20b + c = 0$

En mettant ces équations ensemble on a

$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2,5 \\ 4a + 2b + c = 8,1 \end{cases}$$

ⓑ $\iff UX = V$ avec $U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 8,1 \end{pmatrix}$

ⓒ $UX = V \iff U^{-1}UX = U^{-1}V$ ($\times U^{-1}$ à gauche)

$\iff X = U^{-1}V$

donc à la calculatrice : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 0,025 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}}$

le toboggan est modélisé par $\boxed{f(x) = 0,025x^2 - x + 10.}$