$2^{nde}4$ *2 mai 2017.*

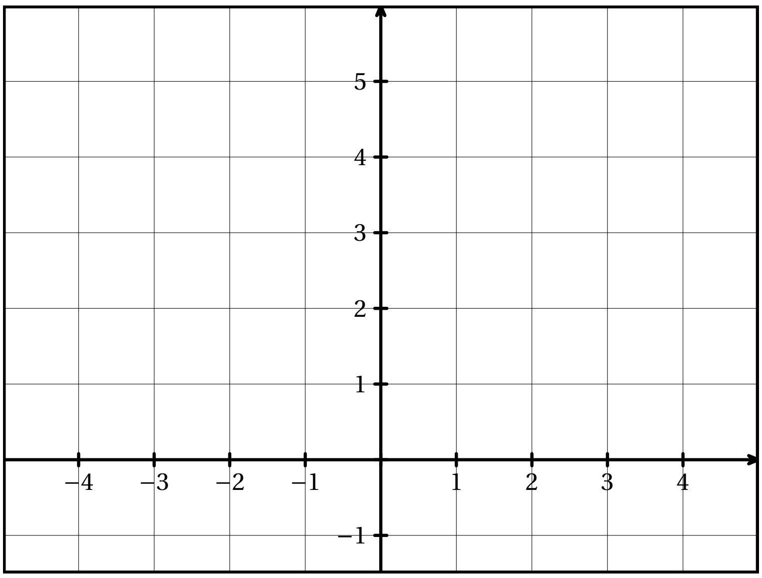
Devoir de Mathématiques N^o 12 (2 h)

Exercice 0 : Nom et prénom :

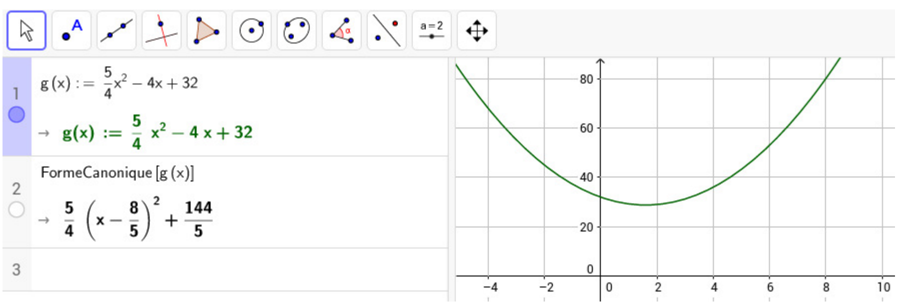
Exercice 1 : (8 points)

On donne $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ et $A(4; -1)$.

1. Quelle est la nature de f ? Représenter la fonction f sur le graphique ci-dessous et placer le point A.



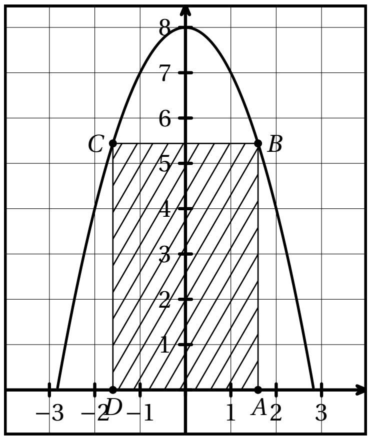
2. On souhaite déterminer la distance entre A et $\mathscr{C}_f$. A l'aide du graphique. Emmetre une conjecture sur cette distance.
3. On veut obtenir une réponse plus précise par le calcul.
   Soit M d'abscisse x un point de $\mathscr{C}_f$. Soit $g(x)$ la fonction égale à AM^2.
   a) Montrer que $g(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - 4x + 17$.
   b) A l'aide de geogebra on obtient la feuille suivante :



   Dresser en justifiant le tableau de variations de g.

   c) Répondre alors au problème. Quelle est la distance minimale et pour quelle valeur de x est-elle atteinte.
   d) Tracer le segment AM réalisant ce minimum. Quelle propriété notoire semble-t-il avoir ?
   e) **Bonus** Pouvez-vous démontrer cette propriété ?

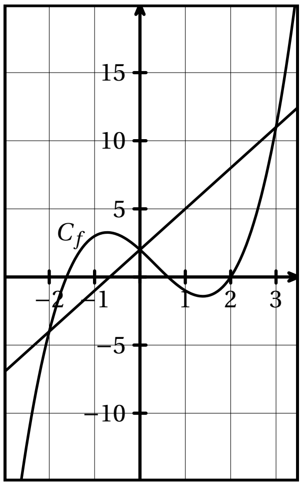
Exercice 2 : (4 points)



On définit la fonction f par $f(x) = 8 - x^2$. Soit $x \geq 0$ et $A(x;0)$ un point mobile de l'axe des abscisses. On construit alors le rectangle $ABCD$ au dessus de l'axe des abscisses comme sur le graphique ci-contre où $B(x; f(x))$, $C(-x; f(x))$ et $D(-x; 0)$. Le but est de déterminer la position du point A pour que l'aire obtenue soir maximale. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire en fonction de x du rectangle $ABCD$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire, quelles sont les valeurs possibles pour x.
2. Déterminer l'expression de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximale et préciser alors combien vaut cette aire.

Exercice 3 : (4 points)



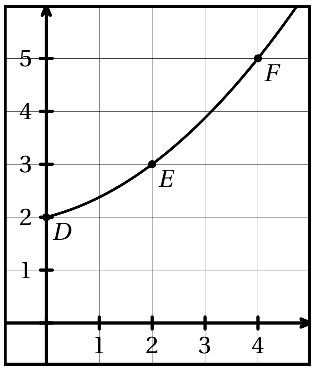
Soit f la fonction polynôme de degré 3 représensentée ci-contre définie par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

On définit la fonction g par $g(x) = 3x + 2$ représentée également sur le graphique.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.
2. Le but de cette question est de résoudre cette même inéquation par le calcul.
   a) Montrer que $f(x) - g(x) = x(x - 3)(x + 2)$
   b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$.

Exercice 4 : (5 points)



Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-contre, on a représenté graphiquement la fonction f. On sait donc que $f(0) = 2$, $f(2) = 3$ et $f(4) = 5$.

1. Expliquer par une phrase ce que veut dire $f(4) = 5$ dans le contexte de l'exercice .
2. a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations ayant pour inconnues a,b et c traduisant cette situation.
   b) Résoudre ce système et exprimer la fonction f.
3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Exercice 5 : (2 points)

On sait que $\cos x = \dfrac{12}{13}$. De plus $x \in [\pi; \dfrac{3\pi}{2}]$. Déterminer $\sin x$.

Exercice 6 : (2 points)
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous est une constante que l'on déterminera.

$$f(x) = (\cos x + 3\sin x)^2 + (3\cos x - \sin x)^2$$

Exercice 7 : (6 points)
Résoudre en utilisant les propriétés des fonctions de référence les équations et inéquations suivantes :

$I_1 :\ x^2 = 72$

$I_2 :\ x^2 > 25$

$I_3 :\ (x+1)^2 < 9$

$I_4 :\ \dfrac{1}{x^2} < 4$

Exercice 8 : (3 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée
Sur les cercles trigonométriques ci-contre, placer les points A_i tels que

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_1}) = -\dfrac{-4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

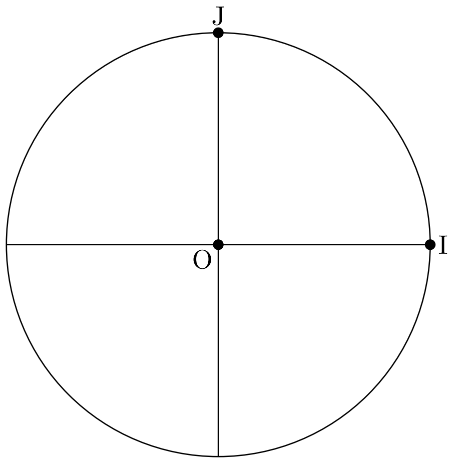
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_2}) = \dfrac{55\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_3}) = \dfrac{121\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_4}) = \dfrac{49\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_5}) = \dfrac{13\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_6}) = -\dfrac{23\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Exercice 9 : (5 points)
Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ puis dans $[0;2\pi]$.

$I_1 :\ \cos x > -\dfrac{1}{2}$

$I_2 :\ \sin x > -\dfrac{1}{2}$

$I_3 :\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$