DS 7 - 14 janv 2014

I ① $A(-10,0)$; $B(0,4)$

Q milieu de $[AB]$ $\Rightarrow$ $Q\left(\frac{-10+0}{2} ; \frac{0+4}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $Q(-5;2)$

② $\vec{AB}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AB^2 = 10^2+4^2 = 116$

$\Rightarrow$ $AB = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $Q(-5;2)$ et rayon $R=\sqrt{29}$.

③ $\vec{QD}\begin{pmatrix}-7+5\\7-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{QD}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $QD^2 = 4+25 = 29$

$\Rightarrow$ $QD = \sqrt{29}$.

ainsi $QD = R \Rightarrow D \in \mathcal{C}$.

④ ABD est un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ et $[AB]$ diamètre de $\mathcal{C}$

donc par th ABD est rectangle en D.

de plus $\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AD^2 = 9+49 = 58$

$\vec{BD}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $BD^2 = 58$

$\Rightarrow$ ABD isocèle.

finalement ABD est rectangle isocèle en D.

⑤ $\vec{AD}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$; $\vec{EF}\begin{pmatrix}6\\14\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{EF} = 2\vec{AD}$

$\Rightarrow$ $\vec{EF}$ et $\vec{AD}$ colinéaires

$\Rightarrow$ $(EF)\parallel(AD)$

⑥ $\vec{DB}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{DE}\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{DE} = 3\vec{DB}$

$\Rightarrow$ $\vec{DE}, \vec{DB}$ colinéaires $\Rightarrow$ D, E, B alignés

⑦ $\left.\begin{array}{l}(DB)=(DE)\\(DB)\perp(DA)\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $(DA)\perp(DE)$; de plus $(DA)\parallel(EF)$

donc par th $(EF)\perp(DE)$ et donc DEF rectangle en E

II $A(3,0)$; $B(-3,-1)$; $C(-1;2)$

2) Soit $D(x;y)$

ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{DC}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6=-1-x\\-1=2-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=3\end{cases} \Leftrightarrow D(5;3)$$

3) Soit $E(x,y)$

$\vec{CB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{BD}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$

$$\vec{AE} = \vec{CB} - 2\vec{BD} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=-2-16\\y=-3-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-15\\y=-11\end{cases}$$ $E(-15,-11)$

4) $\vec{BD}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix}-12\\-10\end{pmatrix}$

$XY'-X'Y = 8(-10)-(-12)\times 4 = -32 \neq 0 \Rightarrow$ E, B, D non alignés.

III 1) $I(-23,y)$; $B(-2,5)$, $C(5,7)$

$\vec{IB}\begin{pmatrix}+21\\5-y\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

I, B, C alignés $\Leftrightarrow \vec{IB}$; $\vec{BC}$ colinéaires

$\Leftrightarrow XY'-X'Y=0 \Leftrightarrow 21\times 2-7(5-y)=0$

$\Leftrightarrow 5-y=\frac{21\times 2}{7}$

$\Leftrightarrow y=5-6=-1$ donc $I(-23,-1)$

2) $\vec{BD}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{CJ}\begin{pmatrix}4m-5\\m-6\end{pmatrix}$

$(BD)//(CJ) \Leftrightarrow \vec{BD}, \vec{CJ}$ colinéaires

$\Leftrightarrow XY'-X'Y=0 \Leftrightarrow 5(m-6)+2(4m-5)=0$

$\Leftrightarrow 13m=40$

$\Leftrightarrow m=\frac{40}{13}$ donc $J\left(\frac{160}{13};\frac{53}{13}\right)$