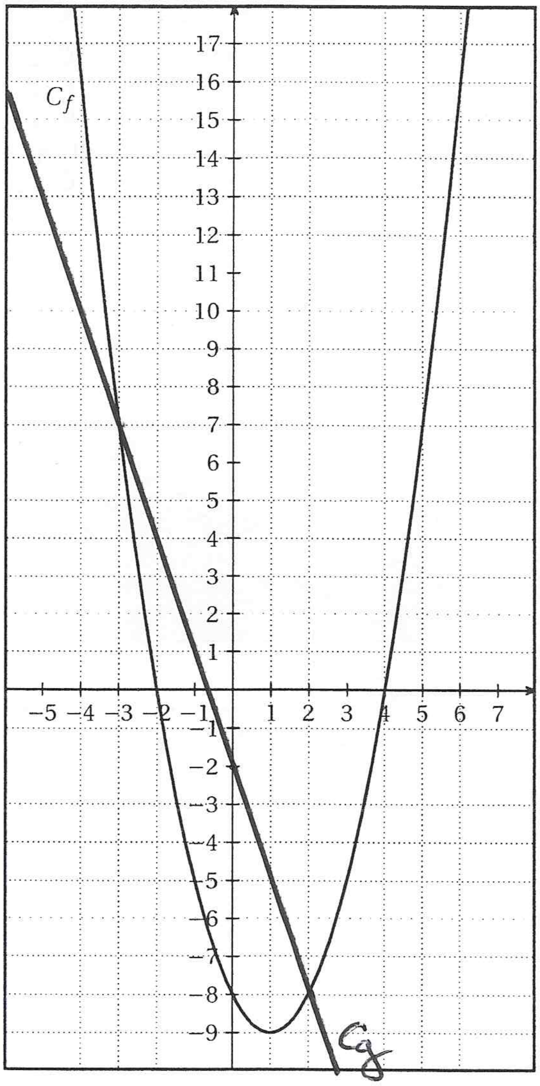
Devoir Mathématiques N^o 10 (1 h)

Exercice 0 : Nom et prénom : Master

Exercice 1 (5 points) : Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la forme factorisée de f.

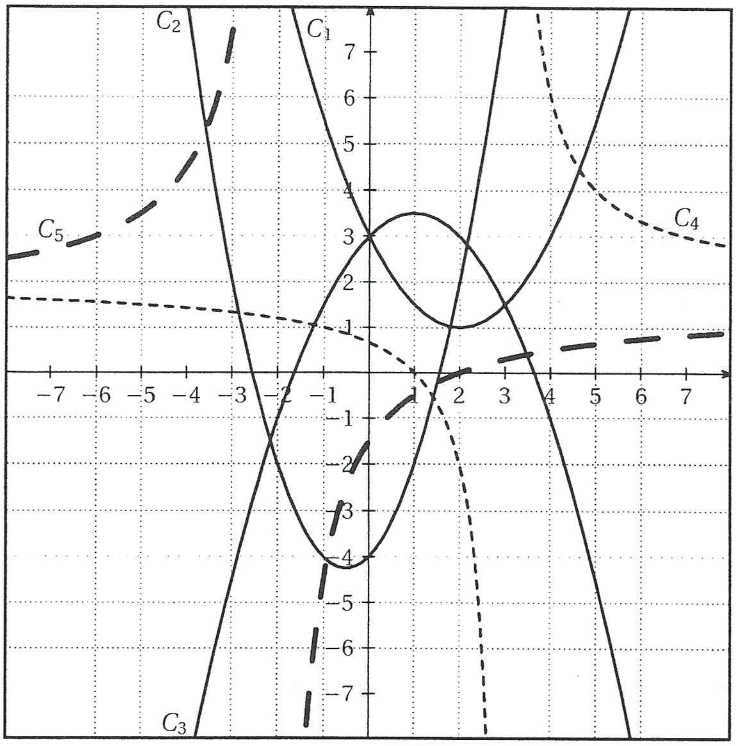
Exercice 2 (9 points) :



On donne f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 8$ et $g(x) = -3x - 2$.

1. Quelle est la nature de f et g ? Représenter $\mathscr{C}_g$.
2. Par lecture graphique, représenter le tableau de variations de f.
3. Déterminer graphiquement le minimum de f.
4. Déterminer les antécédents de -8 par f. (par calcul)
5. Soit $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = (x+3)(x-2)$.
6. Déterminer par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3 (2,5 points) :



On donne les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{3x-6}{2x+4}$ pour $x \neq 2$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{-2x+2}{3-x}$ pour $x \neq 3$.
5. $f_5(x) = x^2 + x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

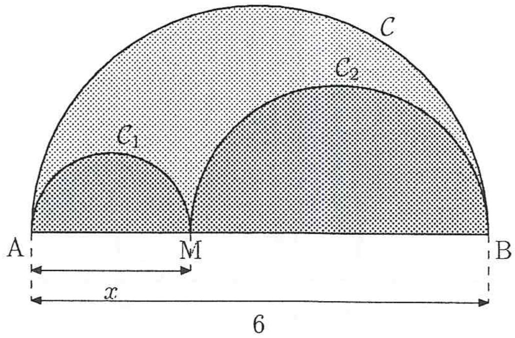
Compléter les phrase suivantes par C_1,C_2,C_3,C_4,C_5

1. La fonction f_1 a pour courbe représentative C_1
2. La fonction f_2 a pour courbe représentative C_5
3. La fonction f_3 a pour courbe représentative .C_3
4. La fonction f_4 a pour courbe représentative C_4
5. La fonction f_5 a pour courbe représentative .C_2

Exercice 4 (4 points) :

On considère le graphique suivant : on a un segment $[AB]$ de longueur 6 et M un point du segment $[AB]$. On note $x = AM$. Soit $\mathcal{C}$ le demi-cercle de diamètre $[AB]$, $\mathcal{C}_1$ le demi-cercle de diamètre $[AM]$, $\mathcal{C}_2$ le demi-cercle de diamètre $[MB]$.

On note $\mathscr{B}$ la surface formée par le demi-cercle $\mathcal{C}$ et le segment $[AB]$. On note $\mathscr{A}(x)$ la surface formée par les demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et le segment $[AB]$.



1. a) Quelle est l'aire d'un disque de diamètre d ?
   b) Déterminer $\mathscr{B}$.
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \dfrac{\pi}{4}(x^2 - 6x + 18)$
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{A}(x) = \dfrac{1}{2}\mathscr{B}$.

DS 10

I ① $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

② pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$

$\Longrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{4} \Longrightarrow f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$

de plus $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

donc $-\frac{1}{4}$ est le minimum de f atteint en $x = \frac{3}{2}$.

③ On a $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$= (x-1)(x-2)$

II ① $f(x) = x^2 - 2x - 8$ donc f est un polynôme de degré 2

$g(x) = -3x - 2$ donc g est une fonction affine.

x	0	-3
$g(x)$	-2	7

C_g est une droite.

②

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

③ Par lecture graphique, le minimum de f est -9 atteint en $x=1$

④ $f(x) = -8 \iff x^2 - 2x - 8 = -8$

$\iff x^2 - 2x = 0$

$\iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

-8 a pour antécédents par f $x=0$ et $x=2$.

⑤ $h(x) = f(x) - g(x)$

$= x^2 - 2x - 8 - (-3x-2)$

$= x^2 + x - 6$

d'autre part $(x+3)(x-2) = x^2 + 3x - 2x - 6$

$= x^2 + x - 6$

donc on a bien $h(x) = (x+3)(x-2)$ pour $x \in \mathbb{R}$

⑥ La position relative de C_f et C_g est donnée par le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$

$= (x+3)(x-2)$ d'après ⑤

x		-3		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc sur $]-\infty, -3[\cup]2; +\infty[$, $h(x) > 0$ et donc C_f au-dessus de C_g

sur $]-3; 2[$; $h(x) < 0$ et donc C_f est en dessous de C_g

pour $x=-3$ ou $x=2$, C_f et C_g s'intersectent.

IV 1 a) Un disque de diamètre d a pour aire $A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

b) B est l'aire d'un demi-cercle de diamètre 6

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1}{2} \times \frac{\pi\, 6^2}{4} = \frac{\pi \times 36}{8} = \frac{\pi \times 9}{2}$$

2) $\mathcal{A}(x)$ est la somme des aires des demi-cercles de diamètre [AM] et [MB]

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} \times x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times (6-x)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(6-x)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(36 - 12x + x^2)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 6x + 18\right)$$

3) $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} B \iff \frac{\pi}{4}(x^2 - 6x + 18) = \frac{\pi}{4} \times 9$

$$\iff x^2 - 6x + 18 = 9$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\iff (x-3)^2 = 0 \iff x = 3.$$

$\frac{1}{2} B = \mathcal{A}(x) \iff x = 3$