DS N° 4 : Dérivation (1h30)

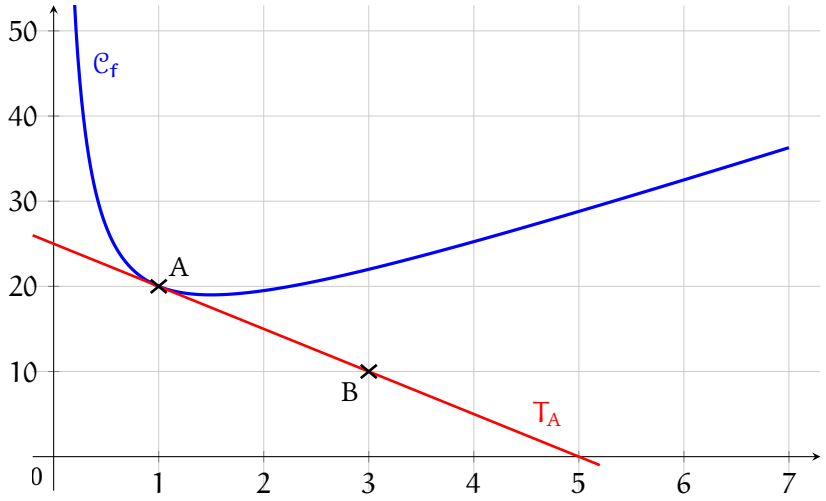
I (3 points)

Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

II (6 points)

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$.
On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite T_A tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(1;20)$.
La droite T_A passe par le point B de coordonnées $(3;10)$.



1. (a) Donner $f(1)$.
   (b) Déterminer la valeur de $f'(1)$.
   (c) Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est : $y = -5x + 25$.

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 9}{x}.$$

On admet que f est dérivable sur cet intervalle.

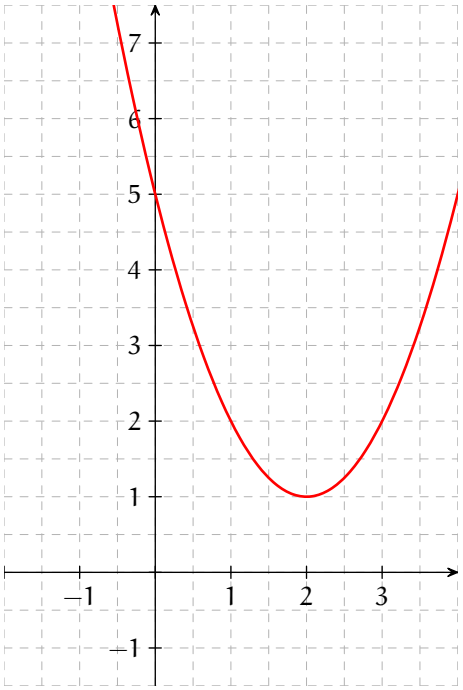
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}.$$

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

3. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$? Justifier votre réponse.

III (3 points)



Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. On donne le graphe ci-contre.
Soit $A(1;0)$

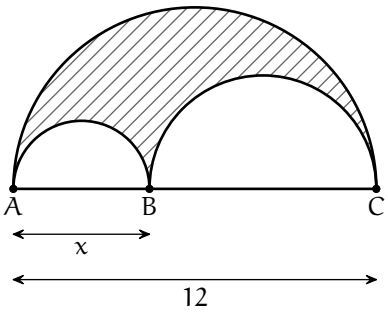
1. Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a satisfait :

$$\mathcal{T}_a : y = (2a-4)x - a^2 + 5$$

3. En déduire le ou les points de contact des tangentes passant par A.

IV (3 points)

$[AC]$ est un segment de longueur 12, $B \in [AC]$ et on note $x = AB$. On contruit d'un même côté de la droite (AB) les demi-cercles de diamètre $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
On note $S(x)$ l'aire de la surface hachurée en fonction de x.



1. Dans quel intervalle I varie x ?
2. Pour $x \in I$, établir que :

$$S(x) = \frac{\pi}{4}(12x - x^2)$$

3. Apres avoir étudié la fonction S, déterminer la valeur x_0 pour laquelle l'aire de la partie hachurée est maximale.

V (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0.
4. Compléter le graphe ci-dessous

