DS N° 4 : Dérivation (1h30)

I (3 points)

Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

Correction :

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est donné par le produit des signes de $3x$ (affine) et de $x+2$ (affine).
On a :

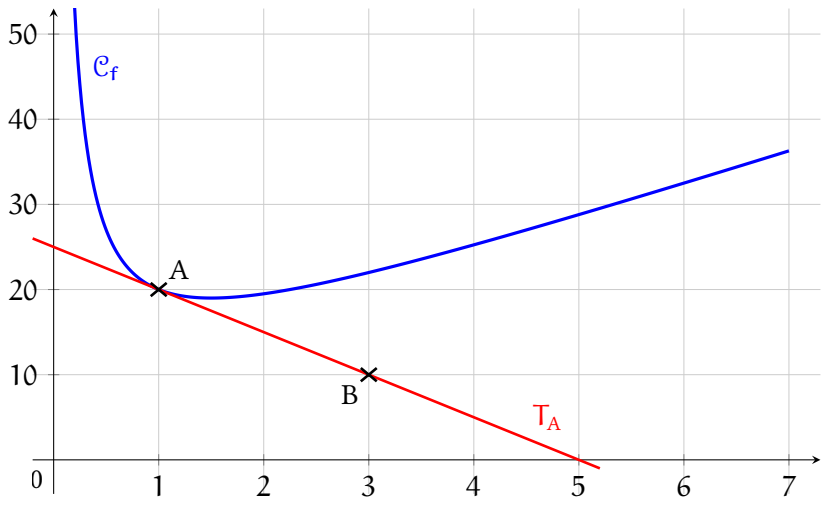
- $f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 1 = -8 + 12 + 1 = 5$
- $f(0) = 0 + 0 + 1 = 1$

On a donc le tableau de signe et de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	5	↘	1	↗	

II (6 points)

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$.
On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite T_A tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(1;20)$.
La droite T_A passe par le point B de coordonnées $(3;10)$.



1. (a) Donner $f(1)$.

Correction :

Le point $A(1;20)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc $f(1) = 20$.

(b) Déterminer la valeur de $f'(1)$.

Correction :

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A qui passe par $A(1;20)$ et $B(3;10)$, donc :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-20}{3-1} = -5$$

(c) Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est : $y = -5x + 25$.

Correction :

Par propriété, la tangente a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Ici, $f(1) = 20$ et $f'(1) = -5$ donc $T_A : y = -5(x-1) + 20$.

$$T_A : y = -5x + 25$$

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 9}{x}.$$

On admet que f est dérivable sur cet intervalle.

2. (a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}.$$

Correction :

Pour $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(8x+7) \times x - (4x^2+7x+9) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{8x^2 + 7x - 4x^2 - 7x - 9}{x^2} \\ &= \frac{4x^2 - 9}{x^2} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2} \end{aligned}$$

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Correction :

Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $2x+3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-3$ qui est affine et s'annule en $\frac{3}{2}$.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(c) En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

Correction :

On a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4\times\frac{9}{4}+7\times\frac{3}{2}+9}{\frac{3}{2}} = \frac{9+\frac{21}{2}+9}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{57}{2}}{\frac{3}{2}} = 19.$

On déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	19	↗	

Donc f est décroissante sur $\left]0;\frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

3. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = 3x+5$? Justifier votre réponse.

Correction :

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. On cherche donc $a > 0$ tel que $f'(a) = 3$.

$$\begin{aligned} f'(a) = 3 &\iff \frac{4a^2-9}{a^2} = 3 \\ &\iff 4a^2-9 = 3a^2 \qquad (\text{car } a^2 > 0) \\ &\iff a^2 = 9 \\ &\iff a = 3 \qquad (\text{car } a > 0) \end{aligned}$$

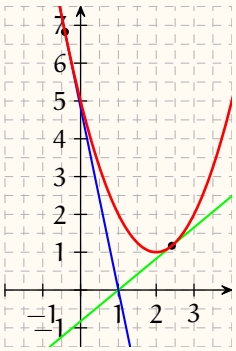
Donc oui, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x+5$.
Avec $f(3) = \frac{36+21+9}{3} = 22$, elle a pour équation $y = 3(x-3)+22$, soit $y = 3x+13$.

III (3 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-4x+5$. On donne le graphe ci-contre.
Soit $A(1;0)$

1. Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.

Correction :



Graphiquement, il semble qu'il y ait deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par A.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a satisfait :

$$\mathcal{T}_a : y = (2a-4)x - a^2 + 5$$

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$.
Par propriété, la tangente a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_a : y &= (2a-4)(x-a) + a^2 - 4a + 5\\ &= (2a-4)x - 2a^2 + 4a + a^2 - 4a + 5\\ &= (2a-4)x - a^2 + 5\end{aligned}$$

3. En déduire le ou les points de contact des tangentes passant par A.

Correction :

$$\begin{aligned}A(1;0) \in \mathcal{T}_a &\iff 0 = (2a-4)\times 1 - a^2 + 5\\ &\iff -a^2 + 2a + 1 = 0\\ &\iff a^2 - 2a - 1 = 0\end{aligned}$$

C'est une équation du second degré avec $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-1) = 8 > 0$, donc on a deux racines :

$$a_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

Il y a donc deux tangentes passant par A, aux points d'abscisses $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
On calcule les ordonnées :

$$\begin{aligned}f(1+\sqrt{2}) &= (1+\sqrt{2})^2 - 4(1+\sqrt{2}) + 5\\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4 - 4\sqrt{2} + 5\\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1-\sqrt{2}) &= (1-\sqrt{2})^2 - 4(1-\sqrt{2}) + 5\\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 4 + 4\sqrt{2} + 5\\ &= 4 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Les points de contact sont donc $M_1\left(1-\sqrt{2}\,;\,4+2\sqrt{2}\right)$ et $M_2\left(1+\sqrt{2}\,;\,4-2\sqrt{2}\right)$.

IV **(3 points)**

$[AC]$ est un segment de longueur 12, $B \in [AC]$ et on note $x = AB$. On contruit d'un même côté de la droite (AB) les demi-cercles de diamètre $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

On note $S(x)$ l'aire de la surface hachurée en fonction de x.

1. Dans quel intervalle I varie x ?

Correction :

Le point B appartient au segment $[AC]$ de longueur 12, donc $x = AB \in [0;12]$. Ainsi $I = [0;12]$.

2. Pour $x \in I$, établir que :

$$S(x) = \frac{\pi}{4}(12x - x^2)$$

Correction :

L'aire d'un disque de raton r est πr^2.

La surface hachurée est le grand demi-disque de diamètre $[AC]$ privé des deux demi-disques de diamètres $[AB]$ et $[BC]$, avec $AC = 12$, $AB = x$ et $BC = 12 - x$.

Les rayons respectifs sont donc $r_1 = 6$, $r_2 = \dfrac{x}{2}$ et $r_3 = \dfrac{12-x}{2}$.

Donc pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2}(\pi \times 6^2 - \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi(12-x)^2}{4}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{144\pi}{4} - \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi(12-x)^2}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(144 - x^2 - (12-x)^2\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(144 - x^2 - (144 - 24x + x^2)\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(24x - 2x^2\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(12x - x^2\right)
\end{aligned}$$

3. Apres avoir étudié la fonction S, déterminer la valeur x_0 pour laquelle l'aire de la partie hachurée est maximale.

Correction :

S est un polynôme donc dérivable sur I, et pour $x \in I$:

$$S'(x) = \frac{\pi}{4}(12 - 2x) = \frac{\pi}{2}(6 - x)$$

Comme $\dfrac{\pi}{2} > 0$, le signe de $S'(x)$ est celui de $6 - x$ qui est affine et s'annule en 6.

On a $S(0) = S(12) = 0$ et $S(6) = \dfrac{\pi}{4}(72 - 36) = 9\pi$.

On déduit le tableau de variations de S :

x	0		6		12
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
S	0	↗	9π	↘	0

L'aire de la partie hachurée est donc maximale pour $x_0 = 6$, c'est-à-dire lorsque B est le milieu de [AC]. Elle vaut alors 9π.

Ⓥ **(5 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x^2+1) - 5x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{5x^2+5-10x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{5-5x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= 5\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

2. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.

Correction :

Sur $\mathbb{R}$: $5 > 0$, $(x^2+1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2$ qui est un polynôme de degré 2 ayant pour racines -1 et 1 (et de coefficient dominant $-1 < 0$).
On a $f(-1) = \dfrac{-5}{2}$ et $f(1) = \dfrac{5}{2}$.
On déduit donc le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	$-\frac{5}{2}$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	

3. Déterminer l'équation de la tangente en 0.

Correction :

Par propriété, la tangente a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Ici, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 5 \times \dfrac{1-0}{(0+1)^2} = 5$ donc la tangente en 0 a pour équation :

$$y = 5x$$

4. Compléter le graphe ci-dessous

Correction :

On utilise le tableau de variations ($f(-1) = -\frac{5}{2}$, $f(1) = \frac{5}{2}$), le point $O(0;0)$ et la tangente en 0 d'équation $y = 5x$:

