

DS N° 1 : Degré 2 (1h)

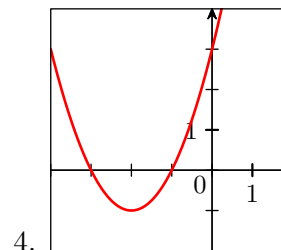
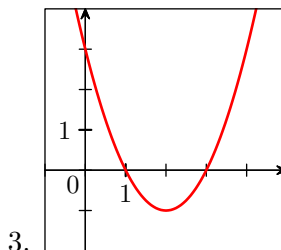
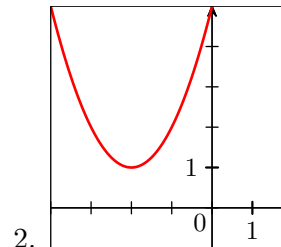
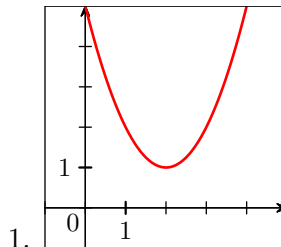
I (1 point) Noter en face de chaque graphe la fonction qui lui correspond.

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$g(x) = (x + 2)^2 - 1$$

$$h(x) = (x + 2)^2 + 1$$

$$i(x) = (x - 2)^2 - 1$$



Correction :

1. La courbe représentée est une parabole de sommet $S(2; 1)$ et tournée vers le haut, donc $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.
2. La courbe représentée est une parabole de sommet $S(-2; 1)$ et tournée vers le haut, donc $g(x) = (x + 2)^2 + 1$.
3. La courbe représentée est une parabole de sommet $S(2; -1)$ et tournée vers le haut, donc $i(x) = (x - 2)^2 - 1$.
4. La courbe représentée est une parabole de sommet $S(-2; -1)$ et tournée vers le haut, donc $h(x) = (x + 2)^2 - 1$.

II (1 point) On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 1)^2 - 4x^4$.

La fonction f est-elle un polynôme de degré 2 ? Vous justifierez votre réponse.

Correction :

On développe :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 1)^2 - 4x^4 \\ &= (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 - 4x^4 \\ &= 4x^4 - 4x^2 + 1 - 4x^4 \\ &= -4x^2 + 1. \end{aligned}$$

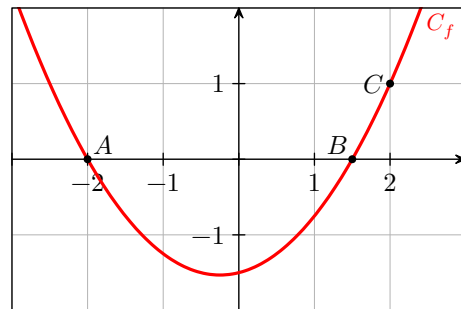
Ainsi $f(x) = -4x^2 + 1$, donc f est bien un polynôme de degré 2.

III (2 points)

Dans les graphiques ci-contre on donne la représentation graphique d'une fonction f polynôme de degré 2.

Nous avons $A(-2; 0)$, $B(\frac{3}{2}; 0)$ et $C(2; 1)$ points de $\mathcal{C}_f$.

Déterminer une expression de la fonction f sous la forme qu'il vous conviendra.

**Correction :**

Les racines sont -2 et $\frac{3}{2}$, donc la forme factorisée est

$$f(x) = a(x + 2) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

De plus, $C(2; 1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(2) = 1$, ce qui nous donne :

$$a(2 + 2) \left(2 - \frac{3}{2} \right) = 1$$

et donc

$$a \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$$

soit $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$.

On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

IV (3 points) On donne $f : x \mapsto 4x^2 + 8x - 5$.

1. Donner la forme canonique de f .

Correction :

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 + 8x - 5 \\ &= 4(x^2 + 2x) - 5 \\ &= 4[(x + 1)^2 - 1] - 5 \\ &= 4(x + 1)^2 - 4 - 5 \\ &= 4(x + 1)^2 - 9. \end{aligned}$$

Donc la forme canonique est

$$f(x) = 4(x + 1)^2 - 9$$

On peut également utiliser la formule du cours : la forme canonique est donnée par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Ici, $a = 4$, $\alpha = \frac{-b}{2a} = -1$ et $\beta = f(\alpha) = -9$, donc

$$f(x) = 4(x + 1)^2 - 9$$

2. Dresser le tableau de variations de f .

Correction :

f est une fonction de degré 2 dont la représentation graphique admet pour sommet $S(\alpha; \beta)$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 4} = -1$$

et

$$\beta = f(-1) = 4(-1)^2 + 8(-1) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9.$$

Comme de plus $a = 4 > 0$, nous pouvons dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f		-9	

3. Déterminer les racines de f et les faire figurer sur son tableau de variations.

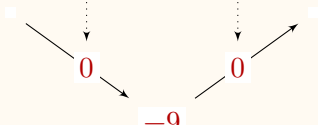
Correction :

On résout $f(x) = 0$ qui avec f fonction de degré 2.

On a $\Delta = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144$, et donc on deux racines :

$$x = \frac{-8 + 12}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-8 - 12}{8} = -\frac{5}{2}.$$

On les fait figurer sur le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f		0	-9	0	

(V) (2 points) Résoudre

$$\frac{x^2 + x - 6}{3x - 2} \geq 0$$

Correction :

Notons $N(x) = x^2 + x - 6$ le numérateur et $D(x) = 3x - 2$ le dénominateur.

Signe du numérateur :

On a $\Delta = 1 + 24 = 25$, donc N admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Comme $a = 1 > 0$, $N(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.

Signe du dénominateur :

$D(x) = 3x - 2$ s'annule pour $x = \frac{2}{3}$ et est positif pour $x > \frac{2}{3}$, négatif pour $x < \frac{2}{3}$.

On déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
$N(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$3x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x^2 + x - 6}{3x - 2}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Et donc on a :

$$\mathcal{S} = [-3; \frac{2}{3}[\cup [2; +\infty[.$$

(VI) (2 points) On donne l'équation :

$$(E) : \quad 2x^4 + x^2 - 6 = 0$$

En posant $X = x^2$, résoudre (E) .

Correction :

On pose $X = x^2$. On a alors :

$$(E) \Leftrightarrow 2X^2 + X - 6 = 0.$$

Réolvons $2X^2 + X - 6 = 0$.

On a $\Delta = 1 + 48 = 49$, donc on a deux racines :

$$X = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1-7}{4} = -2.$$

Donc

$$(E) \Leftrightarrow x^2 = -2 \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{3}{2}$$

$x^2 = -2$ est impossible. Ainsi on a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$$