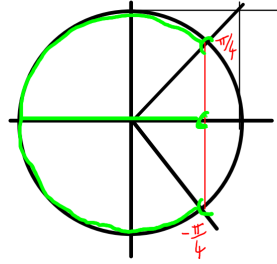


**I (1 points)**

Résoudre l'inéquation :

$$(E_1) : \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dans } [-\pi; \pi].$$

**Correction :**

D'après le cercle trigonométrique l'ensemble solution est :

$$S = \left[ -\pi; -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{4}; \pi \right]$$

**II (1 points)** Montrer que pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[$  :

$$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin^2 x}$$

**Correction :**

On réduit au même dénominateur. Pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[$ ,  $\sin x \neq 0$  et  $1 \pm \cos x \neq 0$  (car  $\cos x \neq \pm 1$  sur cet intervalle).

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} &= \frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \frac{2}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

**III (2 points)** Résoudre dans  $[0; 2\pi[$  :

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

**Correction :**

Soit (E) l'équation donnée. On a

$$(E) \iff \begin{cases} X = \sin x \\ 2X^2 + 3X + 1 = 0 \end{cases}$$

Discriminant pour  $2X^2 + 3X + 1 = 0$  :  $\Delta = 9 - 8 = 1$ .

On a donc deux racines :  $X_1 = \frac{-4}{4} = -1$  et  $X_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ .

Et ainsi on a :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ 2X^2 + 3X + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}.$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}.$$

L'ensemble solution est donc :

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

**(IV)** (2 points) On donne  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{2 + \sin^2 x}$$

1. Montrer (en détaillant) que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x + \pi) = f(x)$$

(On dit que  $f$  est de période  $\pi$ .)

**Correction :**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \frac{\cos(2(x + \pi))}{2 + \sin^2(x + \pi)} \\ &= \frac{\cos(2x + 2\pi)}{2 + (-\sin x)^2} && \text{(car } \sin(x + \pi) = -\sin x) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2 + \sin^2 x} && \text{(car } \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est bien  $\pi$ -périodique.

2. Etudier la parité de  $f$ .

**Correction :**

On calcule  $f(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\cos(-2x)}{2 + \sin^2(-x)} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2 + (-\sin x)^2} && (\text{car } \cos(-2x) = \cos(2x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin x) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2 + \sin^2 x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : la fonction  $f$  est paire.

Ⓟ (1 point) On donne

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Déterminer  $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ .

**Correction :**

On utilise la relation fondamentale  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{13\pi}{12}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{13\pi}{12}\right) \\ &= 1 - \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4-2+\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Or  $\frac{13\pi}{12}$  est dans le troisième quadrant ( $\pi < 13\pi/12 < 3\pi/2$ ), donc son sinus est négatif.  
Ainsi :

$$\boxed{\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Ⓟ\* Montrer

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

**Correction :**

On élève au carré le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} \\ &= \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} \\ &= \frac{8-2\sqrt{4\times 3}}{4} \\ &= \frac{8-4\sqrt{3}}{4} \\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ceci signifie par passage à la racine que  $\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

et comme  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} > 0$ , on a donc

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$