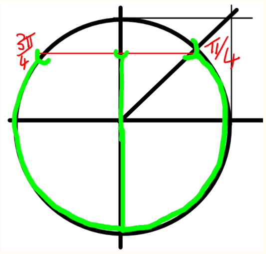
Spé math (1ère) — DS N° 13 : Trigonométrie (30 min) — 29 avril 2026

I (1 point)

Résoudre l'inéquation :

(E_1) : $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.

Correction :



D'après le cercle trigonométrique l'ensemble solution est :

$$\boxed{S = \left[-\pi;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]}$$

II (1 points) Montrer que pour tout $x \in]-\pi;\pi[$:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

Correction :

On réduit au même dénominateur. Pour tout $x \in]-\pi;\pi[$, $\sin x \neq 0$ et $1+\cos x \neq 0$ (car $\cos x \neq -1$ sur cet intervalle).

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} &= \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{1+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x} \\
&= \frac{2}{\sin x}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

III (2 points) Résoudre dans $[0;2\pi[$:

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

Correction :

Soit (E) l'équation donnée. On a

$$(E) \iff \begin{cases} X = \cos x \\ 2X^2 + 3X + 1 = 0 \end{cases}$$

Discriminant pour $2X^2 + 3X + 1 = 0$: $\Delta = 9 - 8 = 1$.
On a donc deux racines : $X_1 = \dfrac{-4}{4} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
Et ainsi on a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} X = \cos x \\ 2X^2 + 3X + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}. \\ &\iff x = \pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{S = \left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}}$$

IV **(2 points)** On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2 + \cos 2x}$$

1. Montrer (en détaillant) que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + \pi) = f(x)$$

(On dit que f est de période π.)

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \frac{\sin^2(x+\pi)}{2 + \cos(2(x+\pi))} \\ &= \frac{(-\sin x)^2}{2 + \cos(2x + 2\pi)} \qquad (\text{car } \sin(x+\pi) = -\sin x) \\ &= \frac{\sin^2 x}{2 + \cos(2x)} \qquad (\text{car } \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien π-périodique.

2. Etudier la parité de f.

Correction :

On calcule $f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\sin^2(-x)}{2+\cos(-2x)} \\ &= \frac{(-\sin x)^2}{2+\cos(2x)} && \text{(car } \sin(-x) = -\sin x \text{ et } \cos(-2x) = \cos(2x)\text{)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{2+\cos(2x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est paire.

V **(1 points)** On donne

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

Correction :

On utilise la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) &= 1 - \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{4}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Donc $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{7\pi}{8}$ est dans le deuxième quadrant ($\pi/2 < 7\pi/8 < \pi$), donc son cosinus est négatif.

Ainsi :

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

VI✳ Montrer

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Correction :

On élève au carré le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}\\ &= \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4}\\ &= \frac{8-2\sqrt{4\times 3}}{4}\\ &= \frac{8-4\sqrt{3}}{4}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ceci signifie par passage à la racine que $\left|\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

et comme $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} > 0$, on a donc

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$