DS N° 8 : Suites (1h30)

I (6 points)

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

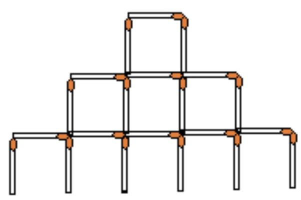
$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\,(1+0,9^n)$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
4. **Ne pas traiter cette question**.
   On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).
   (a) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1\,020$.
   Justifier la réponse à l'aide de la calculatrices.
   (b) Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
   Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ...... :
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

II (3 points) On empile des allumettes de la façon indiquée sur la figure.



On note v_n le nombre d'allumettes sur la $n^{\text{iéme}}$ rangée. On a donc $v_1 = 3$.

1. Etablir une relation de récurrence et déterminer la nature de la suite (v_n).
2. Ecrire v_n en fonction de n.
3. Quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour faire un empilement de 40 rangées ?

III (3 points) Une suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n+1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est arithmétique.
2. Déterminer alors (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

IV (2 points) On définit pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

C'est-à-dire

$$S_n = 1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Remarque. Ça forme une ce que l'on appelle une série...

1. Donner une expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

V **(4 points)** On considère la fonction f définie pour $x > -\frac{1}{2}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$$

On a tracé dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Sur la figure, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, représentez sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 et u_2.
   (b) Quelle conjecture pouvez faire sur les variations et la limite de la suite (u_n) ?
2. (a) Pour $x > -\frac{1}{2}$, déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   (b) Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$ puis la tracer sur le graphique.