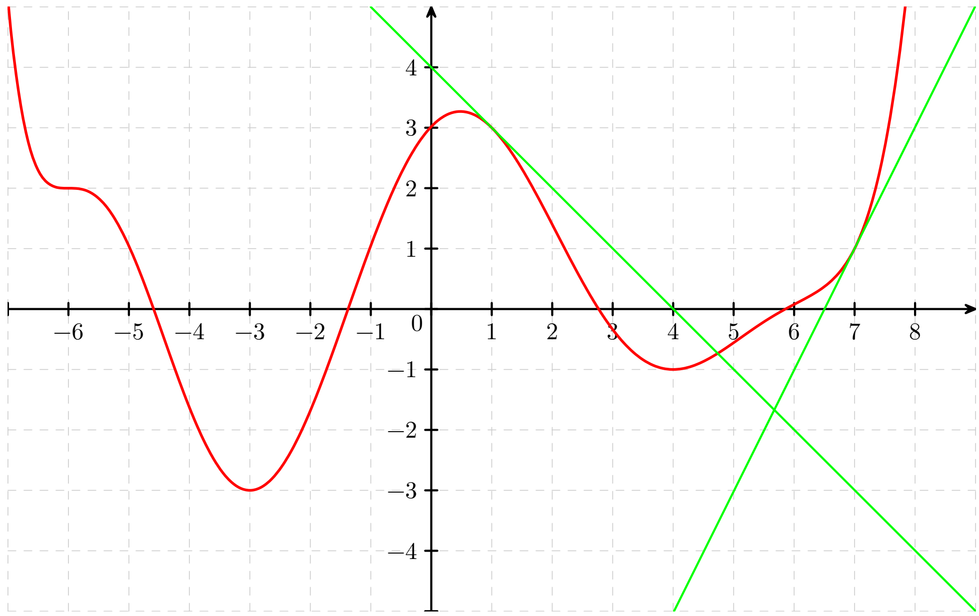
DS N°5 : Autour de la dérivation (1h50)

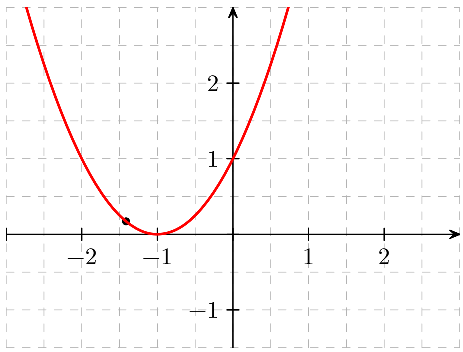
I **(3 points)** La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites tracées sont tangentes à la courbe $\mathcal{C}$.



1. Déterminer, par lecture graphique, $f'(1)$ et $f'(7)$.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$. Expliquer.
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

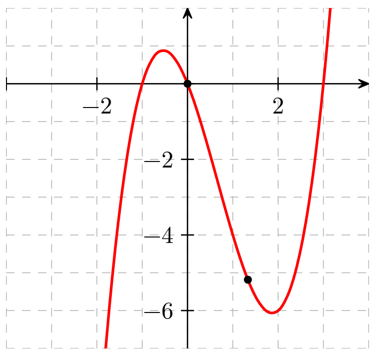
II **(3 points)**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. On donne le graphe ci-contre.
Soit $A(0; -1)$



1. Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a satisfait :
$$\mathcal{T}_a : y = (2a+2)x - a^2 + 1$$
3. Déduire et donner l'équation des tangentes passant par A.

III **(4 points)**
Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ définie $\mathbb{R}$.



1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f. *Vous ne donnerez pas la valeur exacte des extremums locaux mais une valeur approchée à 10^{-2}.*
3. On a représenté f sur le graphe ci-contre.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 puis tracez-la.
   (b) Il semble qu'il existe une autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à $\mathcal{T}$. Déterminer son équation ainsi que son point de contact.

IV **(4 points)** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $D =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

On admet que f est dérivable sur D.

1. Après avoir calculer la dérivée de f, dresser le tableau de variations de f sur D.
2. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ en $x = 1$.
3. Résoudre $f(x) = 2x$.
4. Représenter la tangente $\mathcal{T}$, calculer $f(3), f(4)$ et compléter le graphe de f dans le repère suivant.

V **(4 points)**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).
2. Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 9 - x^2$ dont une représentation est donnée ci-contre.

   On note $A(-3; 0), B(3; 0)$ et pour $x \in]0, 3[$ on note M et N les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$. On considère le trapèze $ABMN$.

   (a) Complétez la figure avec $x = 2$.

   (b) *Rappel : Aire du trapèze* $= \dfrac{\textit{(petite base + grande base)} \times \textit{hauteur}}{2}$.

   Désormais $x \in]0, 3[$, déterminer l'expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ du trapèze $ABMN$ en fonction de x.

   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale. Quelle est alors cette aire ?