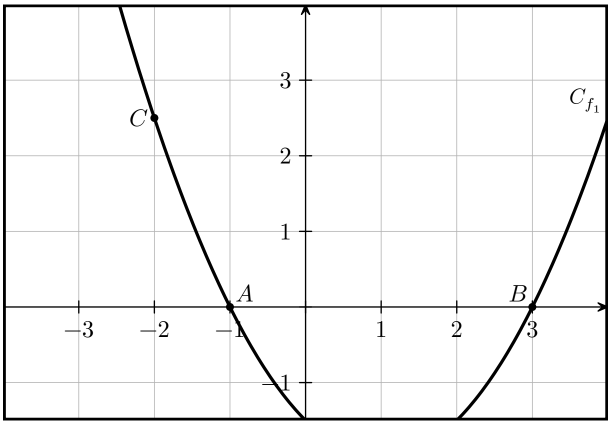
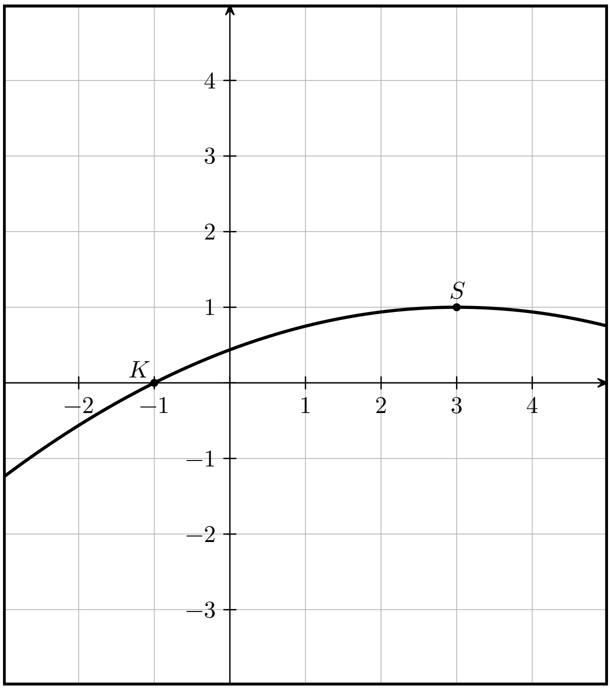
# DS N°2 : Degré 2 (1h)

**I** **(2 points)**
Dans les graphiques ci-dessous on donne la représentation graphique de deux fonctions $f_1$ et $f_2$ polynômes de degré 2. Nous avons $A(-1;0)$, $B(3;0)$ et $C(-2;\frac{5}{2})$ points de $\mathcal{C}_{f_1}$ et $S(3;1), K(-1;0)$ points de $\mathcal{C}_{f_2}$ avec $S$ sommet de la parabole.

1. Déterminer la fonction $f_1$. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).
2. Déterminer la fonction $f_2$. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).




**Correction :**

1. Les racines sont $-3$ et $1$, donc la forme factorisée est $f_1(x) = a(x+1)(x-3)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   De plus, $C(-2, \frac{5}{2}) \in \mathcal{C}_{f_1}$ donc $f_1(-2) = \frac{5}{2}$, ce qui nous donne :
   $a(-2+1)(-2-3) = \frac{5}{2}$, et donc $5a = \frac{5}{2}$ donc $a = \frac{1}{2}$.
   On a alors
   $$\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)}$$
2. $S(3,1)$ est le sommet de la courbe donc par propriété, la forme canonique est
   $$f_2(x) = a(x-3)^2 + 1.$$
   de plus $K(-1,0) \in \mathcal{C}_{f_2}$ donc $f_2(-1) = 0$, ce qui nous donne :
   $$\begin{aligned} a(-1-3)^2 + 1 = 0 &\iff 16a + 1 = 0 \\ &\iff a = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$
   Ainsi
   $$\boxed{f_2(x) = -\tfrac{1}{16}(x-3)^2 + 1}$$

**II** **(6 points)** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)$ : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

**Correction :**

On a $(E_1) \iff 4X^2 - 5X + 1 = 0$ avec $X = x^2$.
Résolvons $4X^2 - 5X + 1 = 0$.
On a $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc on a deux racines :

$$X = \frac{5+3}{8} = 1 \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff x^2 = 1 \ \text{ ou } \ x^2 = \frac{1}{4}\\ &\iff x = 1 \ \text{ ou } \ x = -1 \ \text{ ou } \ x = \frac{1}{2} \ \text{ ou } \ x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S} = \left\{1 : -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

$(E_2)$ : $\dfrac{x^2}{x+2} \leq 1$

**Correction :**

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff \frac{x^2}{x+2} - 1 \leq 0\\ &\iff \frac{x^2 - (x+2)}{x+2} \leq 0\\ &\iff \frac{x^2 - x - 2}{x+2} \leq 0.\end{aligned}$$

Notons $N(x)$ le numérateur et étudions son signe :
On a $\Delta = 9$ donc $N$ admet deux racines : $x = 2$ et $x = -1$. On déduit donc le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et donc on a :

$$\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty, -2[ \cup [-1, 2]\,.}$$

**III** **(5 points)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, et soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans ce même repère.

**Correction :**

R.A.S

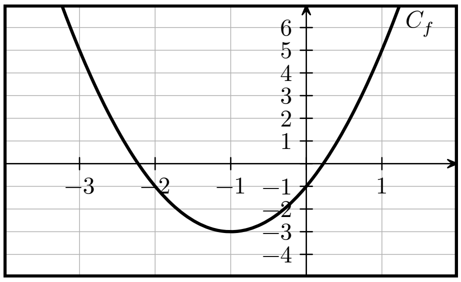
2. Dresser le tableau de variations de $f$.

**Correction :**

$f$ est une fonction de degré 2 dont la représentation graphique admet pour sommet $S(\alpha; \beta)$ avec :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \cdot 2} = -1.$
et $\beta = f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 1 = 2 - 4 - 1 = -3.$
Comme de plus $a = 2 > 0$, nous pouvons dresser le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |

3. Déterminer par le calcul la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.




**Correction :**

La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de la différence :

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (-x + 2) \\ &= 2x^2 + 4x - 1 - (-x + 2) \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est un polynôme de degré 2 avec $\Delta = 49$. Donc $d$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-5 - 7}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5 + 7}{4} = \dfrac{1}{2}$.

On peut alors dresser le tableau de signe de $d$ (compte tenu du fait que $a = 2 > 0$) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et on peut donc conclure que :

- Sur $]-\infty; \dfrac{1}{2}[\cup]3 \; : \; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.
- Sur $]\dfrac{1}{2}; 3[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$.

**IV** **(2 points)** Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Montrer que si $a$ et $c$ n'ont pas le même signe alors $f$ admet deux racines.

**Correction :**

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $a$ et $c$ on des signes contraires, c'est que $ac < 0$ et donc $-4ac > 0$ et donc par somme $\Delta > 0$.
Il s'ensuit que $f$ admet deux racines.

2. $\star$ Montrer que de plus les racines ont un signe opposé.

**Correction :**

La fonction $f$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Alors

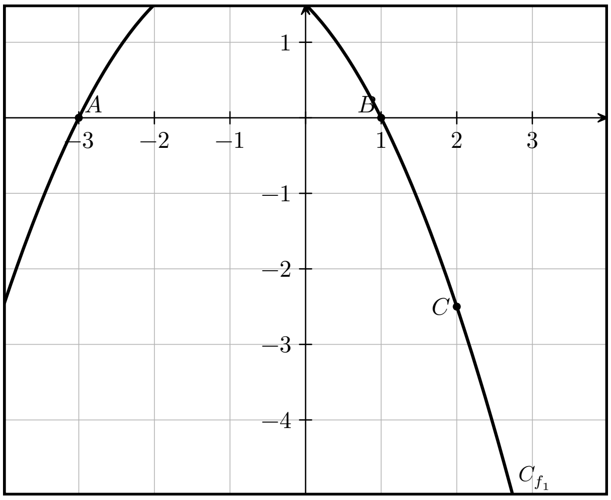
$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

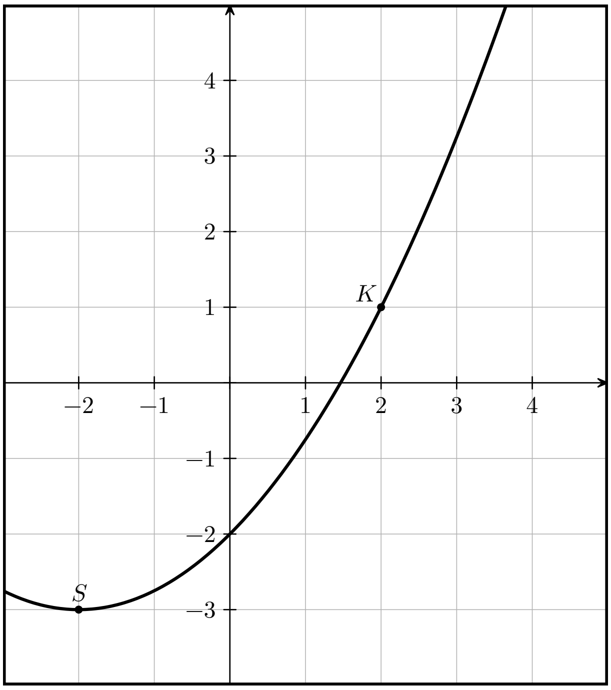
Et comme $c$ et $a$ on des signes opposés, on déduit $\dfrac{c}{a} < 0$ et donc $x_1x_2 < 0$.
Ainsi, $x_1$ et $x_2$ ne peuvent avoir le même signe. Et donc $x_1$ et $x_2$ opposés.

# DS N°2 : Degré 2 (1h)

**I** **(2 points)**
Dans les graphiques ci-dessous on donne la représentation graphique de deux fonctions $f_1$ et $f_2$ polynômes de degré 2. Nous avons $A(-3;0)$, $B(1;0)$ et $C(2;-\frac{5}{2})$ points de $\mathcal{C}_{f_1}$ et $S(-2;-3), K(2;1)$ points de $\mathcal{C}_{f_2}$ avec $S$ sommet de la parabole.

1. Déterminer la fonction $f_1$. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).
2. Déterminer la fonction $f_2$. Vous l'écrirez sous la forme que vous désirez (développée, factorisée ou forme canonique).




**Correction :**

1. Les racines sont $-3$ et $1$, donc la forme factorisée est $f_1(x) = a(x+3)(x-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
De plus, $C(2, -\frac{5}{2}) \in \mathcal{C}_{f_1}$ donc $f_1(2) = -\frac{5}{2}$, ce qui nous donne :
$a(2+3)(2-1) = -\frac{5}{2}$, et donc $5a = -\frac{5}{2}$ donc $a = -\frac{1}{2}$.
On a alors
$$\boxed{f_1(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)}$$
2. $S(-2,-3)$ est le sommet de la courbe donc par propriété, la forme canonique est
$$f_2(x) = a(x+2)^2 - 3.$$
de plus $K(2,1) \in \mathcal{C}_{f_2}$ donc $f_2(2) = 1$, ce qui nous donne :
$$\begin{aligned} a(2+2)^2 - 3 = 1 &\iff 16a - 3 = 1 \\ &\iff 16a = 4 \\ &\iff a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$
Ainsi
$$\boxed{f_2(x) = \tfrac{1}{4}(x+2)^2 - 3}$$

**II** **(6 points)** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1)$ : $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

**Correction :**

On a $(E_1) \iff 4X^2 - 9X + 2 = 0$ avec $X = x^2$.
Résolvons $4X^2 - 9X + 2 = 0$.
On a $\Delta = 81 - 32 = 49$, donc on a deux racines :

$$X = \frac{9+7}{8} = 2 \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff x^2 = 2 \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

$(E_2)$ : $\dfrac{x^2}{x+4} \leq 2$

**Correction :**

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff \frac{x^2}{x+4} - 2 \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 2(x+4)}{x+4} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 2x - 8}{x+4} \leq 0.\end{aligned}$$

Notons $N(x)$ le numérateur et étudions son signe :
On a $\Delta = 4 + 32 = 36$ donc $N$ admet deux racines : $x = 4$ et $x = -2$. On déduit donc le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x^2-2x-8}{x+4}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et donc on a :

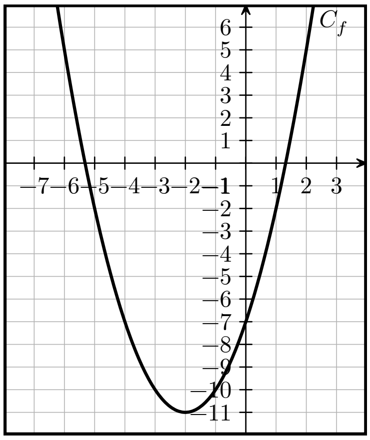
$$\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty, -4[ \cup [-2, 4].}$$

**III** **(5 points)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 7$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, et soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$.

1. Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans ce même repère.

**Correction :**

R.A.S




2. Dresser le tableau de variations de $f$.

**Correction :**

$f$ est une fonction de degré 2 dont la représentation graphique admet pour sommet $S(\alpha;\beta)$ avec :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\cdot 1} = -2$.
et $\beta = f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) - 7 = 4 - 8 - 7 = -11$.
Comme de plus $a = 1 > 0$, nous pouvons dresser le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | $-11$ | $\nearrow$ | |

3. Déterminer par le calcul la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

**Correction :**

La position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de la différence :

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (2x+1) \\ &= x^2 + 4x - 7 - 2x - 1 \\ &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est un polynôme de degré

2 avec $\Delta = 4 + 32 = 36$. Donc $d$ admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$.
On peut alors dresser le tableau de signe de $d$ (compte tenu du fait que $a = 1 > 0$) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et on peut donc conclure que :

- Sur $]-\infty;-4[\cup]2:+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.
- Sur $]-4;2[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$.

**IV** **(2 points)** Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Montrer que si $a$ et $c$ n'ont pas le même signe alors $f$ admet deux racines.

**Correction :**

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $a$ et $c$ on des signes contraires, c'est que $ac < 0$ et donc $-4ac > 0$ et donc par somme $\Delta > 0$.
Il s'ensuit que $f$ admet deux racines.

2. $\star$ Montrer que de plus les racines ont un signe opposé.

**Correction :**

La fonction $f$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Alors

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Et comme $c$ et $a$ on des signes opposés, on déduit $\dfrac{c}{a} < 0$ et donc $x_1x_2 < 0$.
Ainsi, $x_1$ et $x_2$ ne peuvent avoir le même signe. Et donc $x_1$ et $x_2$ opposés.