$1^{ère}$ *25 mai 2022.*

DS n° 16 : Devoir bilan (2h)

I **(4 points)**

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^x - x$$

1. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse 1.
3. En déduire que :
   si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.
4. Que dire si $a < b < 0$?

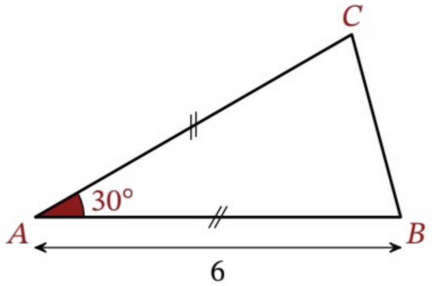
II **(3 points)** On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points $D\,(4\,;-3)$, $R\,(7\,;2)$ et $T\,(-1\,;3)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{DT}$.
2. Utiliser la question précédente pour déterminer une valeur arrondie au centième de degré de l'angle géométrique $\widehat{RDT}$.

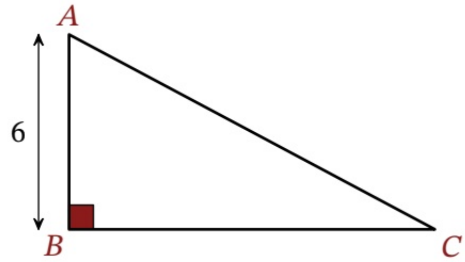
III **(2 points)**

Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Les calculs doivent être justifiés.

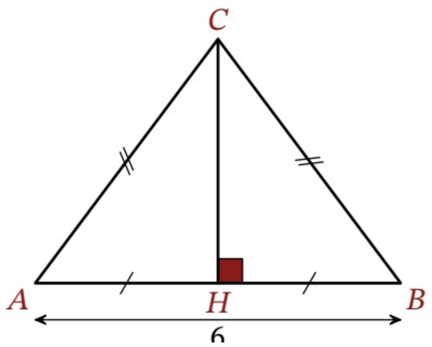
Cas 1



Cas 2

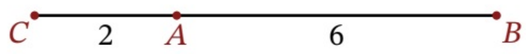


Cas 3



Cas 4

A, B et C sont alignés.



IV (5 points)

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

   On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

   On note :
   - V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
   - R l'évènement « Paul rate son train ».

   a) Faire un arbre pondéré résumant la situation.

   b) Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

   c) Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

V (6 points)

On définit les suites (a_n) et (n_n) pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}. \quad \text{et } a_0 = 0$$

et

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \quad \text{et } b_0 = 12$$

Partie A

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

   b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

   c) Déterminer la limite de (u_n).

2. a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

   b) Étudier les variations de la suite (b_n).

Partie B

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

   Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. En déduire les formes explicites de (a_n) et (b_n).

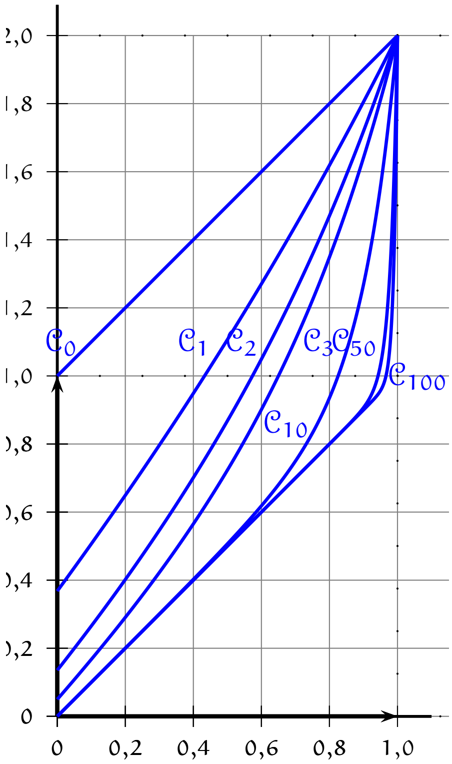
VI (5 points)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
4. Que vaut le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_n$ au point A ? Cela valide-t-il votre conjecture ?

   Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Montrer que la suite définie (v_n) pour tout entier naturels n par $v_n = u_n - x$ est une suite géométrique. Étudier alors la limite éventuelle de la suite (u_n).