DS N°16

I $h(x) = e^x - x$;

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$

et $h'(x) > 0 \iff e^x > 1$

$\iff e^x > e^0$

$\iff x > 0$ car exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi on a le signe de $h'(x)$ et le tableau de variations de h:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2 Si $0 < a < b$ alors $h(0) < h(a) < h(b)$ car h croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $1 < h(a) < h(b)$

et donc $h(a) - h(b) < 0$

3 Si $a < b < 0$ alors la f° étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a

$h(a) > h(b) > h(0)$

donc $h(a) - h(b) > 0$.

II $D(4,-3)$; $R(7,2)$; $T(-1;3)$

1. $\overrightarrow{DR}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DT}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DT} = -15 + 30$

$= 15$

2 D'autre part : $DR^2 = 9 + 25$

$= 34$

donc $DR = \sqrt{34}$

et $DT^2 = 25 + 36$

$= 61$

donc $DT = \sqrt{61}$

Ainsi $\vec{DR}.\vec{DT} = DR.DT\cos(\widehat{RDT})$

donc $\cos\widehat{RDT} = \dfrac{\vec{DR}.\vec{DT}}{DR.DT}$

$= \dfrac{15}{\sqrt{34}.\sqrt{61}}$.

On déduit à l'aide de la calculatrice $\boxed{\widehat{RDT} \approx 70{,}77°}$

III **1** $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC\cos 30$

$= 6^2 . \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 18\sqrt{3}$

2 $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AB}$ (par projection de C sur (AB) en B)

$= AB^2$

$= 36$

3 $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$ (par projection de C sur (AB) en H)

$= AB.AH$ (vecteurs colinéaires)

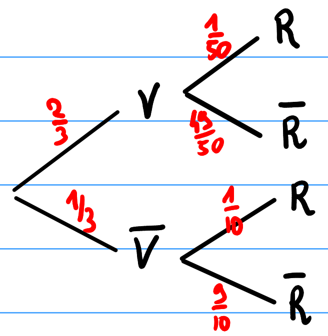
$= 18.$

4 $\vec{AB}.\vec{AC} = -AB.AC$ (colinéaires et de sens contraire)

$= -12$

IV **1.a**

Les données de l'énoncé permettent de dresser l'arbre suivant :



1b. $V, \bar{V}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\bar{V} \cap R)$$
$$= P(V).P_V(R) + P(\bar{V}).P_{\bar{V}}(R)$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{50} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10}$$
$$= \frac{2+5}{150}$$
$$= \frac{7}{150}$$

1.c On cherche $P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)}$

$$= \frac{P(V).P_V(R)}{P(R)}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}.\frac{1}{50}}{\frac{7}{150}}$$
$$= \frac{3}{7}$$

2 D'après le cours $E(T) = \sum_{k=10}^{18} p(T=k).k$

$$= 0,14.10 + 0,13.11 + \ldots\ldots + 0,07.18$$
$$= 13,5 \text{ min}$$

En moyenne, le temps pour se rendre à la gare est : **13 min et 30 s**.

V $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$; $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$ $a_0 = 0$; $b_0 = 12$

A. **1.a** $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$

$$= \frac{1}{12} \cdot (3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n)$$

$$= \frac{1}{12} (5b_n - 5a_n)$$

$$= \frac{5}{12} (b_n - a_n)$$

$$= \frac{5}{12} u_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ avec $u_0 = 12$

1b par théorème, $u_n = 12 . \left(\frac{5}{12}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1c $0 < \frac{5}{12} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2.a $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - a_n$

$$= \frac{-a_n + b_n}{3}$$

$$= \frac{u_n}{3}$$

et d'après l'expression explicite de (u_n), $u_n > 0$ donc $a_{n+1} - a_n > 0$

donc (a_n) croissante.

2b On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{4}$

$$= -\frac{u_n}{4} < 0$$ donc (b_n) décroissante

B **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$

$$= 3 . \frac{2a_n + b_n}{3} + 4 \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

$$= 3a_n + 4b_n$$

$$= v_n$$

Donc (v_n) est stationnaire. $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0$

$$= 3a_0 + 4b_0$$
$$= 48$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} -a_n + b_n = 12.\left(\frac{5}{12}\right)^n & (L_1) \\ 3a_n + 4b_n = 48 & (L_2) \end{cases}$

Alors par combinaison : $3L_1 + L_2$ donne $7b_n = 36\left(\frac{5}{12}\right)^n + 48$

donc $b_n = \dfrac{36\left(\frac{5}{12}\right)^n + 48}{7}$

Et $L_2 - 4L_1$ donne $7a_n = 48 - 48\left(\frac{5}{12}\right)^n$

donc $a_n = \dfrac{48\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)}{7}$

VI $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$

A. 1. Sur $[0,1]$: $x \geqslant 0$ et $e^{n(x-1)} > 0$

Donc par somme $f_n(x) \geqslant 0$

D'autre part : $\forall x \in [0,1]$: $f_n'(x) = 1 + n e^{n(x-1)}$

Et donc par somme $f_n'(x) > 0$ donc f_n strictement croissante

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) = 1 + e^{n.0}$

$= 1+1$

$= 2$

donc $A(1;2) \in C_n$ pour tout n. (Ça se voit sur le graphe)

3. Les coefficients directeurs des tangentes à A à C_n semblent augmenter et tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.
(les tangentes deviennent verticales)

4. Le coefficient dir de la tangente à C_n en A vaut

$$a_n = f_n'(1)$$
$$= 1 + n e^{n.0}$$
$$= 1 + n$$

Ce coefficient vaut $1+n$ et tend vers l'infini quand n augmente.

B.1 Si $x = 1$; $u_n = f_n(1)$
$$= 1+1$$
$$= 2$$

Donc (u_n) stationnaire.

2. $v_n = u_n - x$
$$= f_n(x) - x$$
$$= e^{n(x-1)}$$
$$= (e^{x-1})^n$$

Donc (v_n) géométrique de raison $q = e^{x-1}$ et de premier terme $v_0 = 1$

On a $0 \leq x < 1$

donc $-1 \leq x-1 < 0$

donc $e^{-1} \leq e^{x-1} < 1$

Donc $-1 < q < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Et comme $u_n = v_n + x$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$ (ça se voit sur le dessin)