DS N°11

I

$$a_1(x) = \frac{e^{5x-1}}{e}(e^x)^2$$
$$= e^{7x-2}$$

$$a_2(x) = (e^{x-1})^2\sqrt{e^{-6x}}$$
$$= e^{2x-2}\cdot e^{-6x/2}$$
$$= e^{2x-2}\cdot e^{-3x}$$
$$= e^{-x-2}$$

II

Pour $x\in\mathbb{R}$:
$$1+e^{-x} = \frac{(1+e^{-x})(e^{2x}+e^{x})}{e^{2x}+e^{x}}$$
$$= \frac{e^{2x}+e^{x}+e^{x}+1}{e^{2x}+e^{x}}$$
$$= \frac{e^{2x}+2e^{x}+1}{e^{2x}+e^{x}}$$

Ainsi l'égalité est démontrée

III

1

$e^{2x+3} < e\sqrt{e} \iff e^{2x+3} < e^{3/2}$

$\iff 2x+3 < \frac{3}{2}$ car exp s.↗ sur $\mathbb{R}$

$\iff x < -\frac{3}{4}$

$S =]-\infty ; -\frac{3}{4}[$

2

$e^{\frac{x-4}{3x+2}} < \frac{1}{e} \iff e^{\frac{x-4}{3x+2}} < e^{-1}$

$\iff \frac{3x-4}{3x+2} < -1$ car exp s.↗ sur $\mathbb{R}$

$\iff \frac{3x-4}{3x+2} + 1 < 0$

$\iff \frac{6x-2}{3x+2} < 0$

x	$-\infty$		$-2/3$		$1/3$		$+\infty$
$\frac{6x-2}{3x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}[$

3 $(e^{3x} - e^{2})(e^{x} - e) < 0$

On étudie le signe de chaque facteur et on fait un tableau de signe

$$e^{3x} - e^{2} < 0 \Leftrightarrow e^{3x} < e^{2}$$
$$\Leftrightarrow 3x < 2 \quad \text{car exp s.} \uparrow \text{ sur } \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

De même :

$$e^{x} - e < 0 \Leftrightarrow e^{x} < e$$
$$\Leftrightarrow x < 1 \quad \text{car exp s.} \uparrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

On a alors le tableau :

x	$-\infty$		$2/3$		1		$+\infty$
$e^{3x} - e^{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x} - e$		$-$		$-$	0	$+$	
Prod		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $S =]-\frac{2}{3};1[$.

IV $f(x) = x e^{-2x}$

1 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x} + x(-2e^{-x})$
$$= (1 - 2x)e^{-2x}$$

2 Sur $\mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

On déduit donc le tableau de variation de $f(x)$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

avec $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{-1}$
$$= \frac{1}{2e}$$

3 L'équation de la tangente en $a=0$ est :

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = 1$ et $f(0)=0$

Donc $T : y = x$.