1[ére] *18 février 2022.*

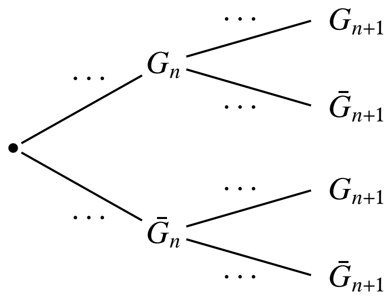
DS n° 9 : Probabilités (1 h)

I Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie »;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Recopier et compléter l'arbre suivant :



5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
6. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = p_n - \frac{3}{4}$.
   a) Montrer que (u_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de u_n puis que pour tout entier n non nul :
   $$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$
   .
7. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

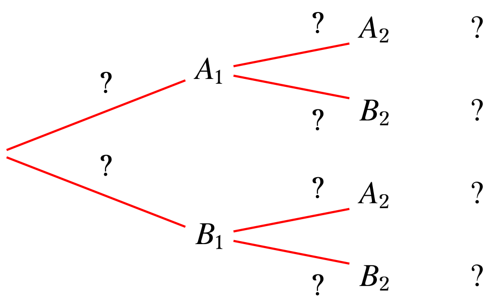
II Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b) Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p_{A_1}(A_2),\ \ p_{B_1}(A_2) \text{ et } p(A_1 \cap A_2)$$

   c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



   d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.