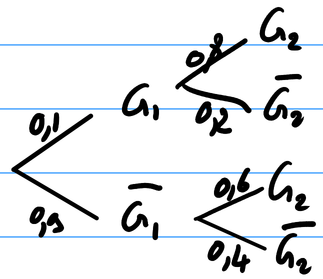
DS n°9

I **1** L'énoncé se modélise par l'arbre suivant.



G_1, $\bar{G_1}$ forme une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G_1} \cap G_2) \\ &= P(G_1) \cdot P_{G_1}(G_2) + P(\bar{G_1}) \cdot P_{\bar{G_1}}(G_2) \\ &= 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,6 \\ &= 0,62 \end{aligned}$$

On a donc $p_2 = 0,62$

2 La probabilité demandée est

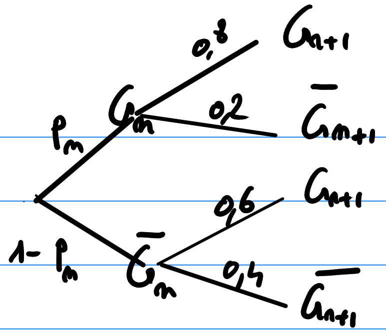
$$P_{G_2}(\bar{G_1}) = \frac{P(\bar{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P_{\bar{G_1}}(G_2)\, P(\bar{G_1})}{P(G_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,62} = \frac{27}{31} \approx 0,87$$

3 Soit A l'événement : « gagner au moins une partie sur les 3 »
Alors $\bar{A}$ est « perdre les 3 premières parties »
Donc $\bar{A} = \bar{G_1} \cap \bar{G_2} \cap \bar{G_3}$

Ainsi à l'aide de l'arbre $p(\bar{A}) = 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,4$
$= 0,144$

et $p(A) = 1 - P(\bar{A})$
$= 0,856$

4



5 $G_n, \bar{G}_n$ forme une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\bar{G}_n \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n).P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\bar{G}_n).P_{\bar{G}_n}(G_{n+1}) \\ &= p_n \cdot 0{,}8 + (1-p_n)\,0{,}6 \\ &= 0{,}2\,p_n + 0{,}6 \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}}$.

6.a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5} p_n - \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{5} u_n \end{aligned}$$

En conséquence (u_n) géométrique de raison $\frac{1}{5}$ avec $u_1 = p_1 - \frac{3}{4}$

$$= \frac{1}{10} - \frac{3}{4}$$
$$= -\frac{13}{20}.$$

6b Par théorème, on a $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

$$= -\frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Et donc comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + \frac{3}{4}$, on déduit $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

7 On a $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et donc par produit et somme, $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}$

Exercice II : La situation peut se modéliser par le tableau suivant :

Sem \ Film	A	B
Sem 1	8	14
Sem 2	4+12 = 16 (qui revoient A ; qui viennent de B)	4+2 = 6 (qui viennent de A ; qui revoient B)

1.a Comme on a équiprobabilité, on a alors :

$$P(A_1) = \frac{\#A_1}{\#\Omega} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

où Ω est l'univers composé des 22 personnes.

Et $$P(A_2) = \frac{\#A_2}{\#\Omega} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

1b On a $$P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{\#(A_1 \cap A_2)}{\#\Omega}}{\frac{\#A_1}{\#\Omega}} = \frac{\#A_1 \cap A_2}{\#A_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi dire dans A_1, ils sont 8 et 4 revoient le film A donc

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

De même : $P_{B_1}(A_2) = \dfrac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1)}$

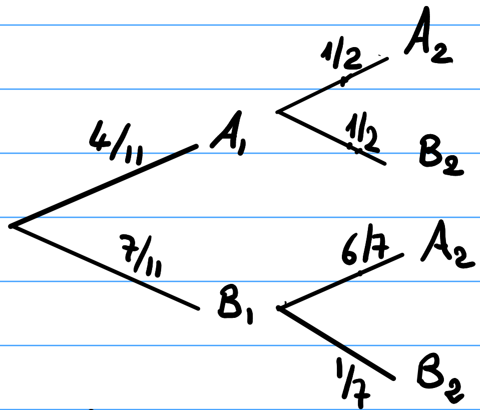
$$= \frac{12}{14}$$

$$= \frac{6}{7}$$

Et $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{\#A_1 \cap A_2}{\#\Omega} = \dfrac{4}{22}$

$$= \frac{2}{11}$$

1c On a alors l'arbre suivant :



1d A_1, B_1 forme une partition de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \cdot P_{B_1}(A_2)$$
$$= \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{7}$$
$$= \frac{8}{11}$$

2 X est la v.a égale au coût total. 30 F pour A ; 20 F pour B

a L'univers de X est donc $\Omega_X = \{40 ; 50 ; 60\}$

2.B 1A,1B 2A

On a $P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{11}$; $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{11}$

↳ La probabilité d'avoir vu A puis B ou B puis A est donc $1 - P(A_1 \cap A_2) - P(B_1 \cap B_2)$

$= 1 - \frac{3}{11}$

$= \frac{8}{11}$

Ainsi la loi de probabilité est

a	40	50	60
$P(X=a)$	$1/11$	$8/11$	$2/11$

2b L'espérance est $E(X) = 40 \cdot P(X=40) + 50 \cdot P(X=50) + 60\, P(X=60)$

$= \frac{40}{11} + 50 \cdot \frac{8}{11} + 60 \cdot \frac{2}{11}$

$= \frac{1}{11}(40 + 400 + 120)$

$= \frac{560}{11}$

$\approx 50{,}9$ F.