DS n° 8 : Suites (45 min)

I **(5 points)**
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.
   c) Quelle est alors la limite de la suite (u_n).

II **(2 points)** Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

   Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.
2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.