DS N° 8

I **1** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$

On a $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 0 + 1$
$= \boxed{\frac{7}{4}}$

et $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} + 1$
$= \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16}$
$= \boxed{\frac{41}{16}}$

2a La formule dans B3 est $\boxed{= 0{,}75 * B2 + 0{,}25 * A2 + 1}$

2b D'après le tableau, (u_n) semble être croissante.

3 $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$
$= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - (n+1)$
$= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n$
$= \frac{3}{4}(u_n - n)$
$= \frac{3}{4}v_n$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ avec $v_0 = u_0 - 0 = 1$

3b Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n$
$= 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + v_n$ et donc $u_n = n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3c On a $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc par somme, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

II. **1** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = n^2 - 42n + 4$

Un rapide calcul de tête nous donne à voir le TV :

x	21
$p(x)$	$\searrow \quad \nearrow$

En particulier on va avoir $P_{22} > P_{21}$

En effet : $P_{21} = -437$; $P_{22} = -436$ et donc (P_n) n'est pas décroissante

L'affirmation est fausse

2 Un petit tableau à la calculatrice semble nous indiquer que (v_n) géométrique

$\forall n \in \mathbb{N},$
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{9}(u_n^2 + 8) - 1 \\ &= \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9}(u_n^2 - 1) \\ &= \frac{1}{9} v_n . \end{aligned}$$

donc **(v_n) est bien géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$**