DS n° 7 : Suites (1h)

(I) (2 points)

$$z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Calculer z_n.
2. Pouvez-vous déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$?

(II) (1 point) Déterminer le sens de variation des suites suivantes de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = u_n - n^3 - 1$ avec $u_0 = 3$.

(III) (1 point) On considère le programme en python suivant :

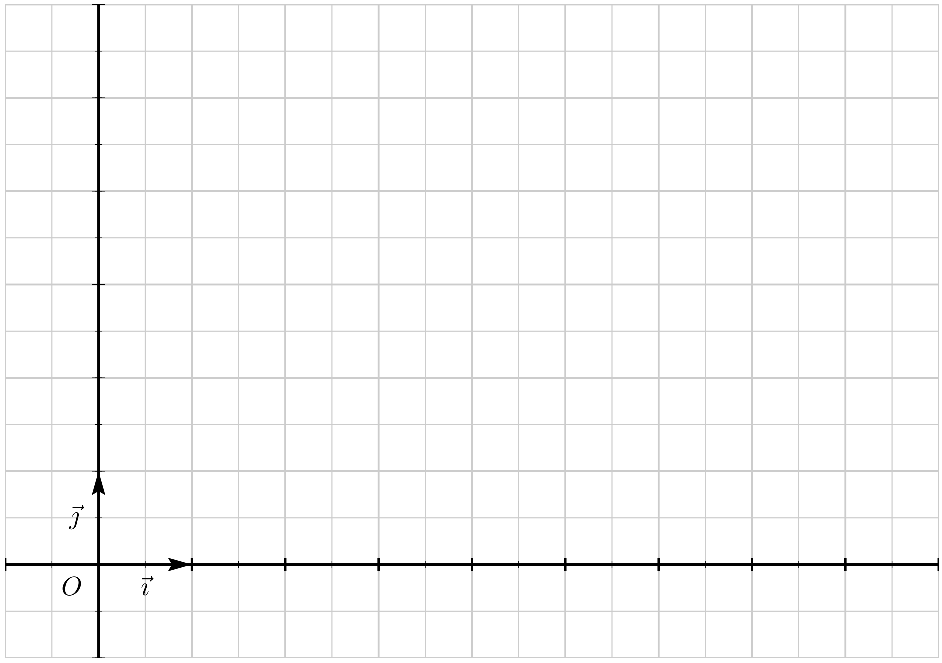
```python
u=3
n=47
for i in range(1,n+1) :
  u=u**2+2*u

print(u)
```

1. A quelle suite cet algorithme fait-il référence ?
2. Quel terme calcule-t-il. On ne cherchera pas la valeur de ce terme.

(IV) (5 points) Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$.

1. a) Sur le graphique ci-joint, représenter la fonction affine $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 5$ puis les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   b) Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?
2. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer (v_n) en fonction de n.
   c) Exprimer (u_n) en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.



(V) **(5 points)** On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B . Chaque mois 20% de fourmis de la population A passent dans la fourmilière B et 30% des fourmis de la population B passent dans la fourmilière A. On notera u_n et v_n le nombre total de milliers de fourmis le mois n respectivement dans les fourmilieres A et B. Le nombre initial de fourmis est $u_0 = 320$ milliers et $v_0 = 180$ milliers.

1. Expliquer succintement pourquoi on a pour n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n$$

   On admet de même que

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n$$

2. On pose pour tout entier naturel n

$$r_n = u_n + v_n;$$

3. Etablir que pour tout entier naturel n : $r_{n+1} = r_n$.
   Que peut-on en déduire pour (r_n) ?