DS N°12

I $g(x) = -xe^x - 1$

1.a $\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = -e^x - xe^x$

$= -e^x(1+x)$

1b sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-(1+x)$

alors on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$-1+\frac{1}{e}$ <0	$\searrow$	$-\infty$

avec $g(-1) = 1.e^{-1} - 1$

$= -1 + \frac{1}{e} < 0$

1c D'après le tableau de variations de g, $g(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

2 pour $x > 0$ $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x - 1}$

a $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - (x+1)e^x}{(e^x-1)^2}$

$$= \frac{-1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

$\forall x > 0$; $(e^x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe.

2b On déduit alors le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

II $f(x) = xe^{-x^2}$ pour $x \geqslant 0$.

1 f est dérivable et pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}$

$$= (1-2x^2)\,e^{-x^2}$$

Comme sur $\mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$, on déduit que $f'(x)$ est du signe de $p(x) = 1-2x^2$.

$$= (1 - x\sqrt{2})(1 + x\sqrt{2})$$

Les racines sont $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x' = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

On déduit donc le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	

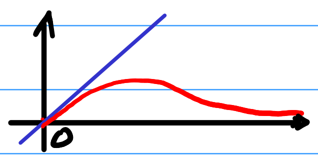
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

2 En 0, le coefficient directeur de la tangente est $f'(0) = 1$

3



III **1a** Par lecture graphique graphique, on a $f'(-3) = 0$

1b De même $f(0) = 2$ et $f'(0) = -\frac{6}{2} = -3$

2 On a $f(x) = a + (x+b)e^{-x}$

a $\forall x \in [-4;3]$, $f'(x) = e^{-x} - (x+b)e^{-x}$

$$= e^{-x}(1-b-x)$$

b $f'(0) = -3$ donc $1 - b = -3$

$f(0) = 2$ donc $a + b = 2$

c On a donc $\begin{cases} 1-b=-3 \\ a+b=2 \end{cases}$

on déduit $b=4$ puis $a=2-4$
$=-2$

On a alors $f(x)=-2+(x+4)e^{-x}$

IV **1** $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots\dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e$
$= 1 + e^{\frac{1}{n}} + (e^{\frac{1}{n}})^2 + \dots\dots + (e^{\frac{1}{n}})^{n-1} + (e^{\frac{1}{n}})^n$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique

On a
$$S_n = \frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}}{1-e^{1/n}}$$
$$= \frac{1-e^{1+1/n}}{1-e^{1/n}}$$

2 Il y a $n+1$ termes dans S_n et chaque terme est de la forme $(e^{1/n})^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et comme $e^{1/n} > 1$ on déduit que chaque terme est plus grand que 1.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \geqslant n+1$

Il s'ensuit que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ (théorème de comparaison)