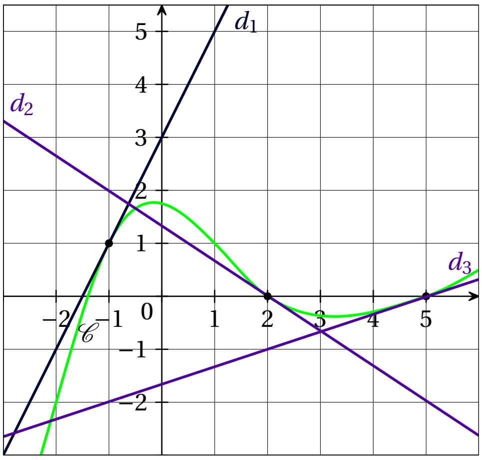
DS n° 3 : Dérivation et degré 2 (1h30)

I **(4 points)** Sur le graphique ci-dessous, les droites d_1, d_2 et d_3 sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -1, 2 et 5.



1. Compléter par lecture graphique et sans justifier,
   - $f'(-1) =$
   - $f'(2) =$
   - $f'(5) =$
2. On sait de plus que $f'(1) = -1$. Tracer, sur la figure ci-dessus, la tangente qui illustre ce résultat.

II **(3 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

1. Soit h un réel non nul.
   Calculer et simplifier : $t(h) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$
2. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} t(h)$
3. Que peut-on conclure ?

III **(4 points)** Soit $f(x) = \sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ mais no dérivable en 0.
Soit $a \geq 0$ et soit pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ le taux d'accroissement de f en a

1. Ecrire et simplifier le taux d'accroissement $t(h)$ de f en a. Vous montrerez en particulier que

$$t(h) = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

2. En déduire que
   a) f est dérivable en a pour $a > 0$ et donnez le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a.
   b) f est non dérivable en 0

IV **(4 points)**

Soit $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la dérivée de f' de f
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x et dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminez l'équation de la tangente D à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

V **(5 points)** On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$
et la droite (d_m) d'équation $y = mx + m - 3$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que chercher le nombre de points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de (d_m) revient à chercher le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx - m + 3 = 0$.
2. Calculer Δ_m, le discriminant de cette équation, et dresser son tableau de signe en fonction de m.
3. En déduire selon les valeurs de m le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (d_m).
4. Tracer sur le graphique les droites d_m ayant un seul point d'intersection. Que peut-on penser de ces droites ?
5. **Bonus only** Montrer que les droites d_m ont toutes un point commun qui ne dépend pas de m. Préciser ce point.