Devoir n^o 13 (1h30) : Géométrie Repérée

I **(6 pts)** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x - y + 5 = 0$ et soit A le point de coordonnées $(-1; 3)$.
   a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}_1$ parallèle à $\mathscr{D}$ passant par A.

   b) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}_2$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.

2. a) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(3; -1)$ et de rayon 4.

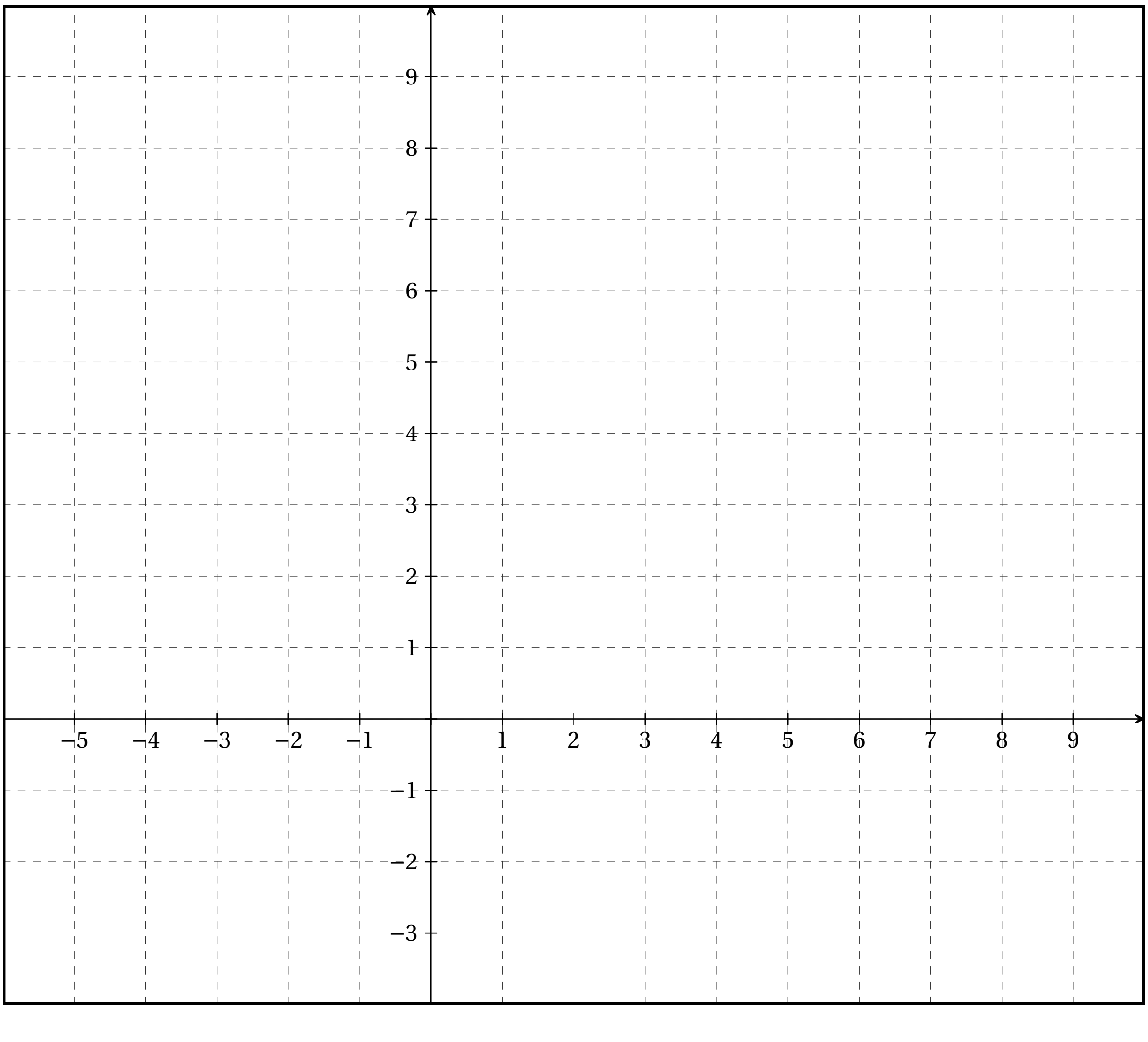
   b) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[BC]$ avec $B(-2; 1)$ et $C(4; -1)$.

II **(7 pts)** Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(6; 0)$ et $B(8; 4)$. Vous compléterez la figure au cours de l'exercice.

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$: justifier que $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle OAB, puis déterminer son centre I et son rayon.

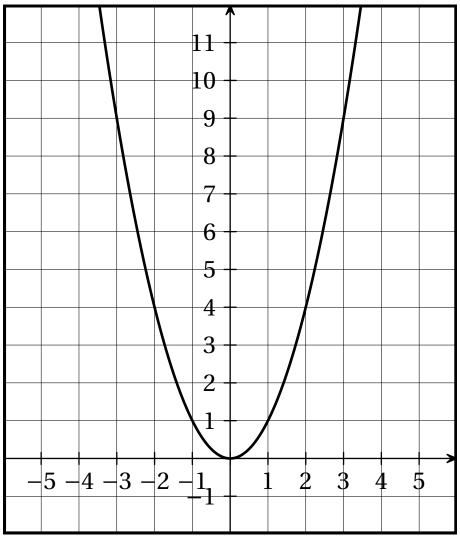
2. Soit Δ la droite d'équation $x - y + 6 = 0$; calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point $E(6; 8)$. Vous en donnerz une équation réduite.



III **(7 points)** Soit f la fonction carrée. On note $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

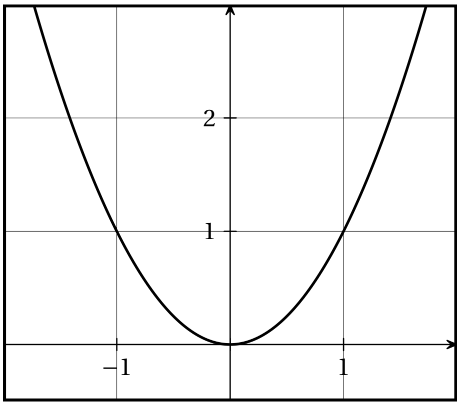
Partie A :
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(0; 6)$ et rayon $3\sqrt{2}$.



1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ puis tracer $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-contre.
2. a) Montrer que $M(x; y)$ point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ si et seulement si $y^2 - 11y + 18 = 0$ avec $y = x^2$.
   b) En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
3. Hachurer sur le graphique la zone $\mathscr{A}$ du plan contenant les points $M(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} y < x^2 \\ x^2 + (y-6)^2 \leq 18 \end{cases}$$

Partie B : Réservée à ceux qui fond spécialité...
Pour $m \in \mathbb{R}_+$, on considère maintenant le cercle $\mathscr{C}_m$ de centre $K_m(0; m)$ et de rayon 1. On imagine que m est grand et qu'on fait tomber $\mathscr{C}_m$ dans la parabole jusqu'à qu'il soit bloqué, c'est-à-dire jusqu'à que $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{P}$ tangents. On vient bien à l'aide de la figure que le cercle est trop gros pour toucher le fond de la parabole...
Le but de cette partie est de déterminer la valeur de m lorsque le cercle est bloqué.



1. Ecrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}_m$.
2. Montrer que $M(x; y)$ point d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{P}$ si et seulement si

$$\begin{cases} y^2 + y(1-2m) + m^2 - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

3. Montrer alors que ce système admet 2 couples solutions pour une valeur unique m_0 de m que vous déterminerez (c'est-à-dire $\#\mathscr{C}_{m_0} \cap \mathscr{P} = 2$) .
4. Quel est le cercle répondant au problème ? Tracer-le alors sur le graphique.