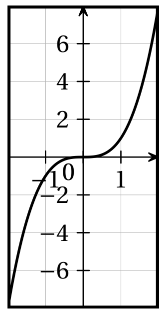
Devoir Mathématiques N^o 15 (2h)

1 2 points



Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction cube et f la fonction associée : $f(x) = x^3$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas deux tangentes à $\mathscr{C}$ orthogonales entre elle. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et T_a, T_b les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A d'abscisse a et B d'abscisse b.

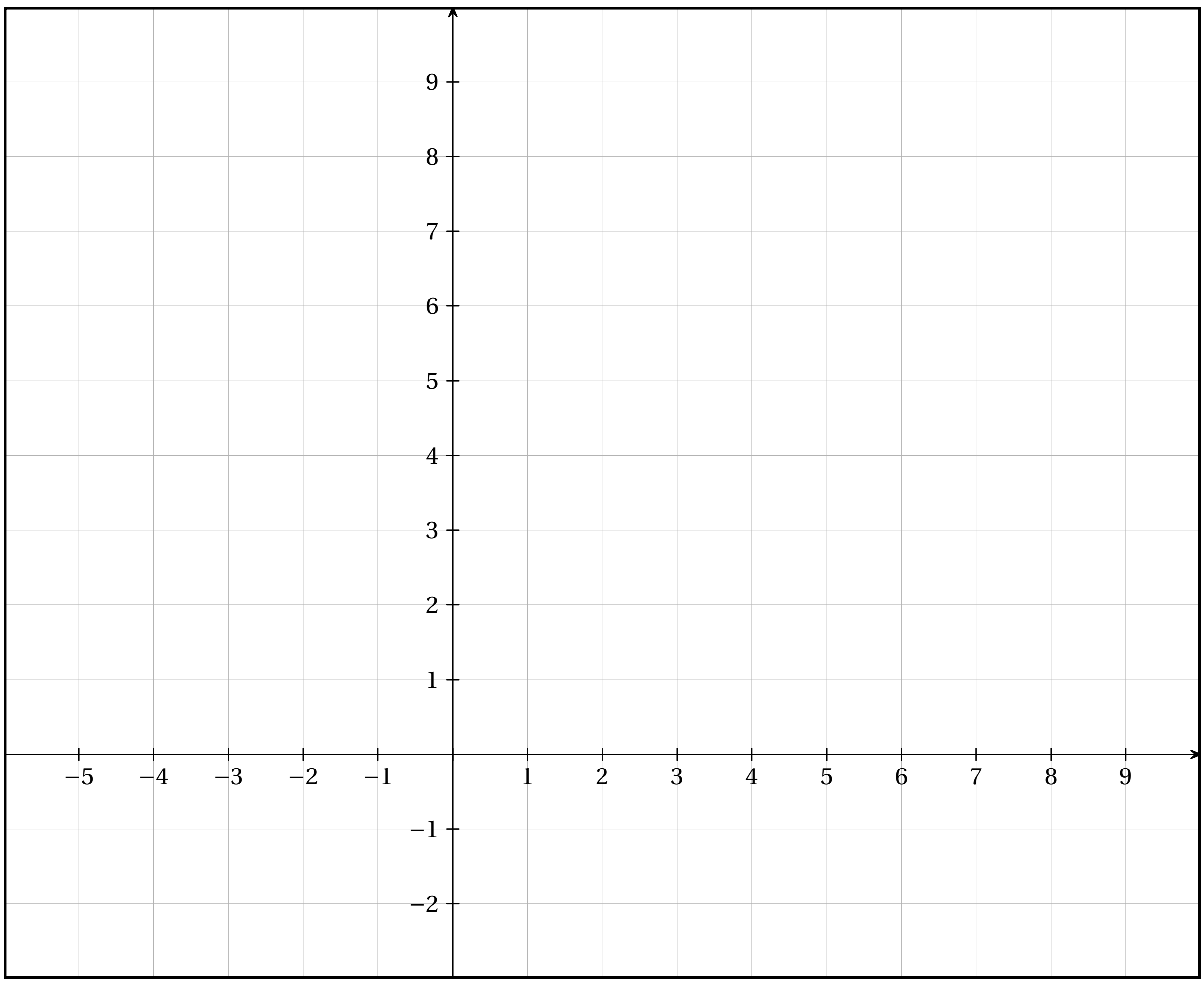
1. Determiner $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_b$ vecteurs directeurs de T_a et T_b.
2. Conclure

2 8 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient $A(3{,}6)$, et $B(0{,}6)$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x{,}y)$ tels que

$$2MA^2 + OM^2 - MB^2 = 68$$

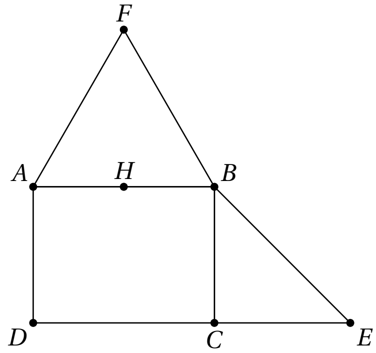
1. Montrer que $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\Omega(3{,}3)$ et rayon 5.
2. On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$. Déterminer le centre Ω' et le rayon r' de $\mathscr{C}$.
3. Faire une figure représentant ces deux cercles.
4. Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ s'intersectent en deux points. On note I celui dont l'ordonnée est la plus grande et J l'autre point. Déterminer leurs coordonnées.
5. a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{E}$ en J. On note $\mathscr{T}_J$ cette droite.
   b) De même déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en J. Soit $\mathscr{T}'_J$ cette droite.
   c) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires (*On dit que les cercles sont orthogonaux*).



3 3 points

La figure ci-contre représente

- Un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $BC = 3$;
- Un triangle ABF équilatéral.
- Un triangle BCE rectangle et isocèle en C.



Le point H est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer les produits scalaires suivants ; vous compléterez la copie (aucune justification n'est demandée).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} =$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} =$
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AF} =$
- $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} =$
- $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} =$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE} =$

4 8 points

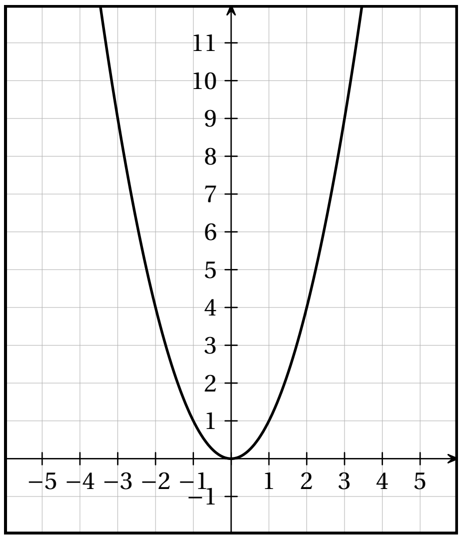
Soit f la fonction carrée. On note $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(0; 6)$ et rayon $3\sqrt{2}$.

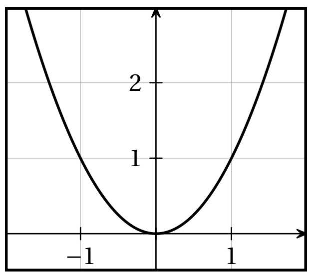
1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ puis tracer $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-contre.
2. a) Montrer que $M(x; y)$ point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ si et seulement si $y^2 - 11y + 18 = 0$ avec $y = x^2$.

   b) En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
3. Hachurer sur le graphique la zone $\mathscr{A}$ du plan contenant les points $M(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} y < x^2 \\ x^2 + (y-6)^2 \leq 18 \end{cases}$$



Partie B : Pour $m \in \mathbb{R}_+$, on considère maintenant le cercle $\mathscr{C}_m$ de centre $K_m(0; m)$ et de rayon 1. On imagine que m est grand et qu'on fait tomber $\mathscr{C}_m$ dans la parabole jusqu'à qu'il soit bloqué, c'est-à-dire jusqu'à que $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{P}$ tangents.
Le but de cette partie est de déterminer la valeur de m correspondante.



1. Ecrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}_m$.
2. Montrer que $M(x; y)$ point d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{P}$ si et seulement si

$$\begin{cases} y^2 + y(1-2m) + m^2 - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

3. Montrer alors que ce système admet 2 couples solutions pour une valeur unique m_0 de m que vous déterminerez (c'est-à-dire $\#\mathscr{C}_{m_0} \cap \mathscr{P} = 2$) .
4. Quel est le cercle répondant au problème ? Tracer-le alors sur le graphique.